

FATECS - Faculdade de Tecnologia e Ciências Sociais Aplicadas  
Faculdade de Engenharia Elétrica

# **Análise de Circuitos Trifásicos – Cálculo de Potências Complexas em Circuitos Monofásicos e Trifásicos, Componentes Simétricas, Curtos- circuitos Trifásicos e monofásicos**



## Sumário

<b>APRESENTAÇÃO</b>	<b>4</b>
<b>1 Representação fasorial</b>	<b>4</b>
<b>2 Cálculo da potência monofásica em circuitos CA</b>	<b>5</b>
<b>3 Circuitos trifásicos equilibrados</b>	<b>10</b>
3.1 Circuitos trifásicos conectados em $\Delta$	11
3.2 Circuitos trifásicos conectados em Y	12
3.3 Cálculo da potência trifásica em circuito equilibrados	13
3.4 Análises por fase	14
3.5 Problemas	17
<b>4 Componentes Simétricas Aplicadas a Sistemas de Potência</b>	<b>28</b>
4.1 Aplicação de Componentes Simétricas a um Sistema de Potência Trifásico	30
4.2 Características elétricas das correntes de sequência	36
4.3 Redes de sequência	38
5.1.1 Causas de curto-circuito	50
5.1.2 Efeitos do curto-circuito	51
5.2 Correntes de Curto-Circuito	51
5.3 Curtos-Circuitos em Sistemas de Potência	51
5.4 Cálculo de Curtos-Circuitos Simétricos	52
5.4.1 Faltas simétricas em circuitos trifásicos	52
5.4.2 Limitadores de curtos-circuitos	53
5.4.3 Reatância percentual	53
5.4.4 Reatância percentual e base de potência	54
5.4.5 Nível de Curto-Circuito	56
5.4.6 Reatores limitadores de correntes de curto-circuito	56
5.5 Passos para o cálculo de faltas simétricas	60
<b>6 Curtos-Circuitos Assimétricos</b>	<b>64</b>
6.1 Faltas assimétricas em sistemas trifásicos	64
6.2 Método das componentes simétricas	65
6.2.1 Alguns fatos sobre as correntes de sequência	65
6.3 Impedâncias de Sequência	66
6.3.1 Alguns fatos sobre as impedâncias de sequência	66
6.4 Análises de Faltas Assimétricas	68
6.4.1 Falta Fase-Terra	68
6.4.2 Falta Fase-Fase	71
6.4.3 Falta Fase-Fase-Terra	74
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>76</b>
<b>LISTA DE FIGURAS E TABELAS</b>	<b>77</b>



## APRESENTAÇÃO

Nas barras de um sistema elétrico, a forma de onda da tensão pode ser assumida como perfeitamente senoidal, com frequência constante, o que será verdade considerando certas tolerâncias. Para as análises que se seguem, nós trabalharemos com representação fasorial das grandezas senoidais, ou seja, tensão e corrente. Para tanto, tensão e corrente serão representadas por letras maiúsculas em itálico  $V$  e  $I$ , respectivamente, representados seus fasores. Os módulos serão representados por  $|V|$  e  $|I|$ , respectivamente. Por fim, este documento é apenas um trabalho de livre tradução de matérias disponíveis na internet e nas referências bibliográficas apresentadas ao final desta apostila.

### 1 Representação fasorial

Um fasor é um número complexo, e como tal apresenta módulo e ângulo de fase, representando assim uma função senoidal. A identidade de Euler pode ser utilizada para representar uma função exponencial por uma função trigonométrica. Assim, aplicando a referida identidade, tem-se:

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \operatorname{sen} \theta \quad (1)$$

A equação (1) nos fornece uma forma alternativa para expressar uma função senoidal (ou cosenoidal). A função cosseno pode ser representada pela parte real da função exponencial e a função senoidal poderá ser representada pela parte imaginária da função, como segue:

$$\cos \theta = \operatorname{Re}\{e^{\pm j\theta}\} \quad (2)$$

e

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{Im}\{e^{\pm j\theta}\} \quad (3)$$

Onde **Re** representa a parte real de e **Im** representa a parte imaginária de.

Uma tensão cosenoidal pode ser representada pela função abaixo, conforme sugerido pela equação (3).

$$\begin{aligned} v &= V_m \cos(\omega t + \phi) \\ &= V_m \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t + \phi)}\} \quad (4) \\ &= V_m \operatorname{Re}\{e^{j\omega t} e^{j\phi}\} \end{aligned}$$

Levando o coeficiente  $V_m$  para dentro do argumento da função, e invertendo a ordem das duas funções exponenciais dentro do argumento, resulta em:

$$v = \operatorname{Re}\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\} \quad (5)$$

Na equação (5) o coeficiente do exponencial  $e^{j\omega t}$  é um número complexo que trás a informação da amplitude e ângulo de fase da função senoidal primitiva representada pelo exponencial. Este número complexo é, por definição, a representação fasorial de uma função senoidal qualquer. Assim:

$$V = V_m e^{j\phi} = \mathcal{P}\{V_m \cos(\omega t + \phi)\} \quad (6)$$

Onde a notação  $\mathcal{P}\{V_m \cos(\omega t + \phi)\}$  retrata "a representação fasorial de  $V_m \cos(\omega t + \phi)$ ." Assim, o fasor  $\mathcal{P}$  transforma a função senoidal do domínio do tempo para o domínio dos números complexos.



A equação (6) é a representação polar de um fasor. Podemos também obter a representação retangular de um fasor como:

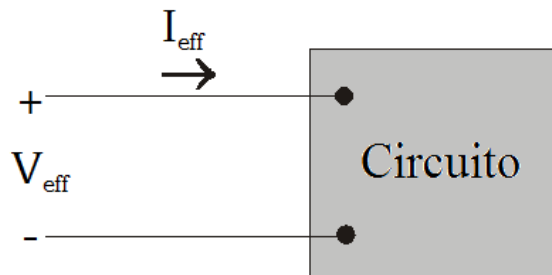
$$V = V_m \cos(\phi) + j \text{sen}(\phi) \quad (7)$$

## 2 Cálculo da potência monofásica em circuitos CA

Nosso objetivo é determinar tanto a potência média demandada por uma carga quanto a potência média fornecida pelo sistema. A Figura 1 descreve o problema. Aqui,  $v$  e  $i$  são sinais de tensão e corrente em regime permanente. Assim, a potência em cada instante é dada por:

$$p = vi \quad (8)$$

Figura 1: Cálculo básico para determinar a potência média em um circuito monofásico.



A potência é medida em watts quando a tensão está em volts e a corrente em amperes. Escrevendo a expressão para  $v$  e  $i$  temos:

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \quad (9)$$

e

$$i = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \quad (10)$$

Na equação (9),  $\theta_v$  é o ângulo de fase da tensão e  $\theta_i$  é o ângulo de fase da corrente. Considerando o instante onde a corrente atinge seu valor máximo positivo como tempo inicial, e expressando  $v$  e  $i$  com respeito a esta referência, temos:

$$\begin{aligned} v &= V_m \cos(\omega t + \theta_v - \theta_i) \\ v &= V_m \cos(\omega t + \theta) \quad (11) \end{aligned}$$

Onde:  $\theta = \theta_v - \theta_i$

$$i = I_m \cos(\omega t) \quad (12)$$

O ângulo  $\theta$  na equação acima é positivo para **correntes indutivas** e negativo para **correntes capacitivas**. Valores positivos de  $p$  mostram que a energia é absorvida pelos terminais do circuito. Substituindo as equações (11) e (12) na equação (8), a potência instantânea será dada por:

$$p = V_m I_m \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega t) \quad (13)$$



A potência média associada com os sinais senoidais de entrada (tensão e corrente) é dada pela média da potência instantânea por um período de tempo de interesse:

$$p_{\text{média}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p dt \quad (14)$$

Onde  $T$  é o período da função senoidal (para sistemas em 60Hz,  $T = 16,67\text{ms}$ ). Substituindo a equação (13) na equação (14), a potência média pode ser determinada. Pelo uso da relação trigonométrica abaixo, podemos expandir a equação (13) como se segue:

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

Fazendo  $A = \omega t + \theta$ , e  $B = \omega t$ , obtemos pela equação (13);

$$p = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta) + \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \theta) \quad (15)$$

Expandindo o Segundo termo do lado direito da equação (15) usando a identidade trigonométrica  $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ , nós obtemos:

$$p = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta) + \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta) \cos(2\omega t) - \frac{V_m I_m}{2} \sin(\theta) \sin(2\omega t) \quad (16)$$

O valor médio de  $p$  é dado pelo primeiro termo do lado direito da equação (16) devido a integral de qualquer dos termos  $\cos(2\omega t)$  ou  $\sin(2\omega t)$  por um tempo igual ao período ser igual a zero. Assim, a potência média é:

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta) \quad (17)$$

$P$  também é referido como potência real ou ativa. O terceiro termo do lado direito da equação (16), termo que contém  $\sin(\theta)$ , é alternativamente positivo e negativo, tendo assim valor médio igual a zero. Esta componente da potência instantânea  $p$  é chamada de **potência reativa instantânea**. O máximo valor da energia pulsante é designado por  $Q$  e é chamada **potência reativa**. Assim,

$$Q = \frac{V_m I_m}{2} \sin(\theta) \quad (18)$$

$P$  e  $Q$  contém a mesma dimensão física. Entretanto, para distinguir entre potência ativa e reativa, utilize-se a unidade de medida var (volt-ampere reativo e seus múltiplos, **kvar**, **Mvar**) para potência reativa. Tomando a corrente como referência,  $Q$  será positivo para indutores ( $\theta = 90^\circ$ ) e negativo para capacitores ( $\theta = -90^\circ$ ). O ângulo  $\theta$  é conhecido como **ângulo do fator de potência**. O coseno desse ângulo é chamado **fator de potência**. Se o fator de potência for atrasado, isso implica em dizer que a corrente está atrasada em relação a tensão. Fator de potência adiantado, significa que a corrente está adiantada em relação a tensão.

A potência média é dada pela equação (17) e a potência reativa é dada por (18) que podem ser escritas em termos de seus valores eficazes ou valores rms, assim, para a potência ativa teremos:



$$\begin{aligned}
 P &= \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta) \\
 &= \frac{V_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos(\theta) \\
 &= V_{efic} I_{efic} \cos(\theta) \quad (19)
 \end{aligned}$$

E, de forma similar, temos para a potência reativa:

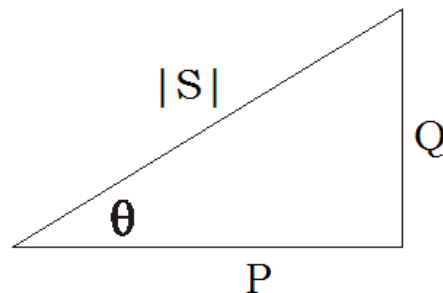
$$Q = V_{efic} I_{efic} \text{sen}(\theta) \quad (20)$$

A *Potência Complexa* é a soma complexa dos valores médios das potências ativa e reativa, conforme equação (21):

$$S = P + jQ \quad (21)$$

A potência complexa apresenta mesma dimensão física que as potências ativa e reativa. Entretanto, para que haja uma distinção entre potências ativa, reativa e complexa (ou aparente), utiliza-se como unidade de medida o termo *volt-ampere* (VA e seus múltiplos, kVA, MVA). Assim utilizaremos VA para potência complexa, Watts para potência ativa e var para potência reativa. Dado o relacionamento cartesiano entre P e Q, é possível representar as potências P, Q e |S| como os lados de um retângulo como apresentado na Figura 2.

Figura 2: Conjunto O triângulo de potências.



Combinando as equações (17), (18) e (21) obtemos:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta) + j \frac{V_m I_m}{2} \text{sen}(\theta) \\
 &= \frac{V_m I_m}{2} (\cos(\theta) + j \text{sen}(\theta)) \\
 &= \frac{V_m I_m}{2} e^{j\theta} = \frac{1}{2} V_m I_m \angle \theta \quad (22)
 \end{aligned}$$

Usando valores eficazes da tensão e da corrente na equação (22), esta se torna:

$$S = V_{efic} I_{efic} \angle \theta \quad (23)$$

As equações (22) e (23) mostram que se os fasores da tensão e da corrente são conhecidos nos terminais da carga, a potência complexa associada a carga será metade do produto da tensão pelo conjugado da corrente ou o produto do valor rms do fasor da tensão pelo conjugado do valor rms do fasor da corrente, ou seja:



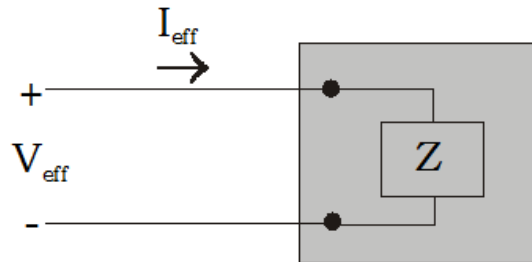
$$S = \frac{1}{2} \mathbf{V} \mathbf{I}^* = P + jQ \quad (24)$$

ou

$$S = \mathbf{V}_{efic} \mathbf{I}_{efic}^* = P + jQ \quad (25)$$

As equações (24) e (25) apresentam algumas variações bastantes úteis. Com o objetivo de demonstrar tais variações, iremos primeiro substituir o circuito na caixa da figura 1 pela impedância equivalente  $Z$  como mostrado na Figura 3.

Figura 3: Circuito genérico substituído por uma impedância equivalente.



Expressando a tensão como o produto entre corrente e impedância, obtém-se:

$$\mathbf{V}_{efic} = Z \mathbf{I}_{efic} \quad (26)$$

Substituindo (26) na equação (25) produz

$$\begin{aligned} S &= Z \mathbf{I}_{efic} \mathbf{I}_{efic}^* \\ &= |\mathbf{I}_{efic}|^2 Z \\ &= |\mathbf{I}_{efic}|^2 (R + jX) \\ &= |\mathbf{I}_{efic}|^2 R + j |\mathbf{I}_{efic}|^2 X = P + jQ \quad (27) \end{aligned}$$

Do qual,

$$P = |\mathbf{I}_{efic}|^2 R = \frac{1}{2} \mathbf{I}_m^2 R \quad (28)$$

e

$$Q = |\mathbf{I}_{efic}|^2 X = \frac{1}{2} \mathbf{I}_m^2 X \quad (29)$$

Na equação (29),  $X$  é a reatância indutiva equivalente ou a reatância capacitiva equivalente do circuito e esta será positiva para circuitos indutivos e negativa para circuitos capacitivos. Outra variação muito útil da equação (25) é obtida pela substituição da corrente pela tensão dividida pela impedância:

$$S = \mathbf{V}_{efic} \left( \frac{\mathbf{V}_{efic}}{Z} \right)^* = \frac{|\mathbf{V}_{efic}|^2}{Z^*} = P + jQ \quad (30)$$

Se  $Z$  for um elemento puramente resistivo,





$$P = \frac{|V_{efic}|^2}{R} \quad (31)$$

Se Z for um elemento puramente reativo,

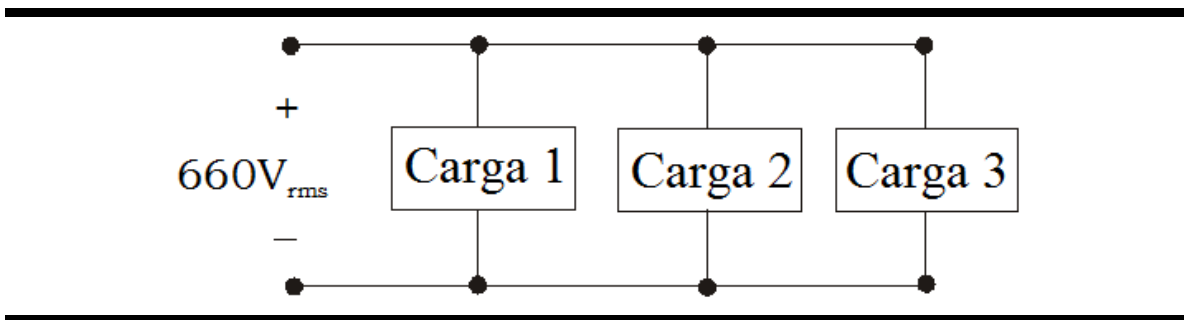
$$Q = \frac{|V_{efic}|^2}{X} \quad (32)$$

X será positiva para um indutor e negativo para um capacitor na equação (32).

### Exemplo 2.1

Três cargas são conectadas em paralelo em uma linha com tensão de 660-V (rms) entre seus terminais, conforme apresentado na figura abaixo. A carga 1 absorve 18kW e 10 kVAR. A carga 2 absorve 6 kVA com fator de potência 0.96-pf atrasado. A carga 3 absorve 22.4 kW com fator de potência unitário. Encontre a impedância equivalente das três cargas conectadas em paralelo.

Figura 4: Sistema para o exemplo 1.1.



### Solução:

$$S_1 = 18 + j10 \text{ kVA}$$

$$S_2 = 6(0.96) - j6(\sin(\cos^{-1}(0.96))) \text{ kVA} = 5.76 - j1.68 \text{ kVA}$$

$$S_3 = 22.4 + j0 \text{ kVA}$$

$$S_{Total} = 46.16 + j8.32 \text{ kVA}$$

Combinação série de R com X na impedância Z:

Da equação 30, temos:

$$\begin{aligned} Z^* &= \frac{(660)^2 \times 10^{-3}}{46.16 + j8.32} = 9.28 \angle -10.217^\circ \Omega \\ &= 9.1398 - j1.6474 \Omega \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } Z = 9.1398 + j1.6474 \Omega$$



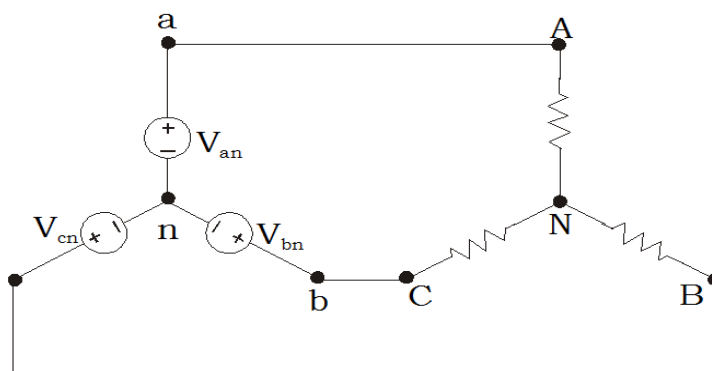
### 3 Circuitos trifásicos equilibrados

A energia elétrica é fornecida por geradores trifásicos. Esta é transformada em níveis de tensão mais apropriados por meio do uso de transformadores e transmitida por circuitos trifásicos, exceto em baixa tensão, onde sistemas monofásicos são largamente utilizados.

Existem duas razões principais para a utilização de sistemas trifásicos. Primeiro, a potência instantânea fornecida aos motores produz um torque constante e, portanto, os motores funcionam de forma muito mais suave. Em segundo lugar, a energia trifásica requer menos custo com condutor do que a energia monofásica para a mesma potência fornecida.

A Figura 5 representa um circuito trifásico ( $3\phi$ ). O circuito é classificado como equilibrado se as impedâncias forem iguais e os fasores das tensões forem iguais em magnitude e defasados entre si de  $120^\circ$  elétricos. Ao discutirmos circuitos trifásicos, é prática conhecida nos referirmos a três fases, sendo estas, fases A, B e C. Além disso, o ângulo de fase da fase A geralmente é utilizada como fasor de referência angular para o sistema. Os três fasores que compõem o conjunto de tensões trifásicas são geralmente referidas como tensão da fase A, tensão da fase B e tensão da fase C.

Figura 5: Circuito trifásico equilibrado.



Estando as tensões de fase desfasadas em  $120^\circ$  elétricos, podem existir duas possíveis relações de fase entre a tensão de fase da fase A e as tensões de fase da fase B e da fase C. Uma possibilidade é a tensão da fase B defasada de  $120^\circ$  elétricos da tensão da fase A e a tensão de fase c adiantada de  $120^\circ$  elétricos da tensão da fase A. Esta relação de fase é conhecida como sequência de fases ABC, ou sequência de fase positiva. A outra possibilidade é que a tensão de fase B esteja adiantada de  $120^\circ$  elétricos da tensão da fase A e a tensão da fase C esteja atrasada de  $120^\circ$  elétricos em relação a tensão de fase da fase A. Esta sequência de fases é conhecida como a sequência de fase ACB ou negativa. Na notação fasorial, os dois conjuntos possíveis de tensões de fase são:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_a &= V_m \angle 0^\circ \\ \mathbf{V}_b &= V_m \angle -120^\circ \\ \mathbf{V}_c &= V_m \angle +120^\circ \end{aligned} \quad (33)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_a &= V_m \angle 0^\circ \\ \mathbf{V}_b &= V_m \angle +120^\circ \\ \mathbf{V}_c &= V_m \angle -120^\circ \end{aligned} \quad (34)$$



A sequência de fases das tensões dadas pela equação (33) está na sequência ABC ou sequência positiva. A sequência de fases das tensões dadas pela equação (34) está na sequência ACB ou sequência negativa. Outra importante característica de um conjunto de tensões trifásicas equilibradas é que a soma fasorial das tensões é igual a zero. Assim, pelas equações (33) ou (34) temos:

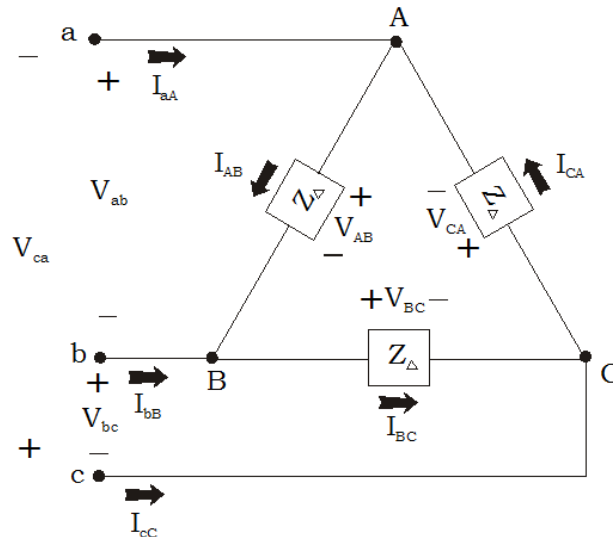
$$\mathbf{V}_a + \mathbf{V}_b + \mathbf{V}_c = 0 \quad (35)$$

Esta relação é válida para qualquer conjunto de variáveis trifásicas equilibradas. Os componentes de circuitos trifásicos balanceados podem ser conectados em Y ou em  $\Delta$ . Os valores de fase e as grandezas de linha para estas conexões estão relacionadas da da forma apresentada no próximo item.

### 3.1 Circuitos trifásicos conectados em $\Delta$

A Figura 6 mostra uma carga trifásica equilibrada conectada em  $\Delta$ . As relações desenvolvidas no entanto, podem ser aplicadas a qualquer componente, por exemplo, gerador, transformador, etc.

Figura 6: Circuito trifásico conectado em delta.



No circuito  $\Delta$ , a tensão de linha  $V_{ab}$  é igual à tensão de fase  $V_{AB} = V_\phi$ . Para demonstrar a relação entre as correntes de fase e as correntes de linha, assumimos uma sequência de fase positiva e  $I_\phi$  representa a magnitude da corrente de fase. Então, selecionando arbitrariamente  $I_{AB}$  como um fasor de referência temos:

$$\mathbf{I}_{AB} = I_\phi \angle 0^\circ \quad (36)$$

$$\mathbf{I}_{BC} = I_\phi \angle -120^\circ \quad (37)$$

e

$$\mathbf{I}_{CA} = I_\phi \angle +120^\circ \quad (38)$$

Podemos expressar as correntes de linha em termos das correntes de fase pela aplicação direta da lei de Kirchoff:



$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA} = I_\phi \angle 0^\circ - I_\phi \angle 120^\circ = \sqrt{3}I_\phi \angle -30^\circ \quad (39)$$

$$\mathbf{I}_{bB} = \mathbf{I}_{BC} - \mathbf{I}_{AB} = I_\phi \angle -120^\circ - I_\phi \angle 0^\circ = \sqrt{3}I_\phi \angle -150^\circ \quad (40)$$

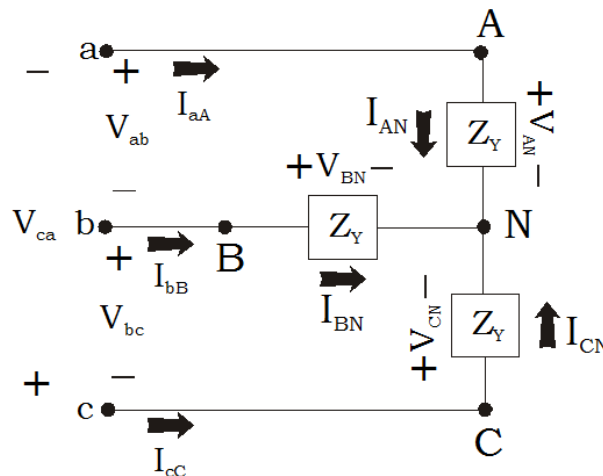
$$\mathbf{I}_{cC} = \mathbf{I}_{CA} - \mathbf{I}_{BC} = I_\phi \angle 120^\circ - I_\phi \angle -120^\circ = \sqrt{3}I_\phi \angle 90^\circ \quad (41)$$

Comparando as equações (39) e (41) com as equações (36) e (38) podemos ver que a magnitude das correntes de linha são  $\sqrt{3}$  vezes maiores que a magnitude das correntes de fase e que o conjunto de correntes de fase está atrasado (**ou adiantado**) do conjunto de correntes de linha por um ângulo de  $30^\circ$  considerando a sequências de fase positiva (**ou negativa**).

### 3.2 Circuitos trifásicos conectados em Y

A Figura 7 ilustra um conjunto de cargas trifásicas equilibradas conectadas em Y. As relações desenvolvidas, no entanto, podem ser aplicadas a qualquer componente, por exemplo, gerador, transformador, etc.

Figura 7: Circuito trifásico conectado em estrela.



Em circuitos conectados em Y, a corrente de linha  $\mathbf{I}_{aA}$  é igual à corrente de fase  $\mathbf{I}_{AN} = \mathbf{I}_\phi$ . Para demonstrar a relação entre as tensões de linha e as tensões de fase, assumimos uma sequência positiva, e faremos  $V_\phi$  ser a magnitude da tensão de fase. Arbitrariamente escolhemos a tensão de fase de uma fase como a referência. Então temos:

$$\mathbf{V}_{AN} = V_\phi \angle 0^\circ \quad (42)$$

$$\mathbf{V}_{BN} = V_\phi \angle -120^\circ \quad (43)$$

$$\mathbf{V}_{CN} = V_\phi \angle +120^\circ \quad (44)$$

Podemos expressar as tensões de linha em termos das tensões de fase utilizando, para isso, a aplicação direta da lei de Kirchoff, como se segue:

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} - \mathbf{V}_{BN} = V_\phi - V_\phi \angle -120^\circ = \sqrt{3}V_\phi \angle 30^\circ \quad (45)$$

$$\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{BN} - \mathbf{V}_{CN} = V_\phi \angle -120^\circ - V_\phi \angle 120^\circ = \sqrt{3}V_\phi \angle -90^\circ \quad (46)$$

$$\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{CN} - \mathbf{V}_{AN} = V_\phi \angle 120^\circ - V_\phi \angle 0^\circ = \sqrt{3}V_\phi \angle 150^\circ \quad (47)$$



As equações (45) e (47) revelam que a magnitude da tensão de linha é  $\sqrt{3}$  vezes maiores que a magnitude das tensões de fase e que o conjunto das tensões de linha está adiantado (**ou atrasado**) do conjunto de tensões de fase por um ângulo de  $30^\circ$  considerando a sequência de fase positiva (**ou negativa**).

### 3.3 Cálculo da potência trifásica em circuito equilibrados

A potência total em um circuito trifásico equilibrado, isto é, a potência trifásica despachada por um gerador ou absorvida por uma carga trifásica é determinada pela soma das potências em cada uma das suas três fases. Em um circuito equilibrado isso é o mesmo que multiplicar a potência em uma das fases por três, uma vez que a potência monofásica é a mesma nas três fases.

Se o módulo da tensão de fase  $V_\phi$  para um sistema conectado em Y for

$$V_\phi = |\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}| \quad (48)$$

E se módulo da corrente de fase  $I_\phi$  para um circuito conectado em Y for

$$I_\phi = |\mathbf{I}_{an}| = |\mathbf{I}_{bn}| = |\mathbf{I}_{cn}| \quad (49)$$

A potência trifásica total será:

$$P = 3V_\phi I_\phi \cos(\theta) \quad (50)$$

Onde  $\theta$  é a diferença angular existente entre a corrente de fase  $I_\phi$ , e a tensão de fase  $V_\phi$ . Se  $V_L$  e  $I_L$  forem os módulos da tensão de linha  $V_L$  e da corrente de linha  $I_L$ , temos, respectivamente,

$$V_\phi = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \quad e \quad I_\phi = I_L \quad (51)$$

Substituindo a equação (51) na equação (50) obtemos:

$$P = \sqrt{3}V_L I_L \cos(\theta) \quad (52)$$

A potência reativa total em var será:

$$Q = 3V_\phi I_\phi \sin(\theta) \quad (53)$$

$$Q = \sqrt{3}V_L I_L \sin(\theta) \quad (54)$$

E a potência aparente da carga em volt-ampères será

$$S = P + jQ$$

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3}V_L I_L \quad (55)$$

As equações (50), (54), e (55) são usadas para o cálculo de P, Q e |S| em redes trifásicas equilibradas desde que as grandezas conhecidas sejam as tensões entre fases, as correntes de linha e o fator de potência,

$$pf = \cos(\theta) \quad (56)$$

Quando se faz referência a um sistema trifásico, pressupõem-se condições equilibradas, salvo especificação em contrário, e os termos tensão, corrente e potência, a não ser que se



especifique de outro modo, significam tensão entre fases, corrente de linha e potência total trifásica, respectivamente.

Se o circuito estiver ligado em  $\Delta$ , a tensão em cada fase é a tensão entre fases e a magnitude da corrente através de cada fase é a magnitude da corrente de linha dividida por  $\sqrt{3}$  (ver Seção B3.1.1), ou

$$V_\phi = V_L \quad e \quad I_\phi = \frac{I_L}{\sqrt{3}} \quad (56)$$

A potência trifásica total será dada por

$$P = 3V_\phi I_\phi \cos(\theta) \quad (57)$$

Substituindo a equação (56) na equação (57) obtemos

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos(\theta) \quad (58)$$

Que é idêntica a equação (52). Segue que as equações (54) e (55) são também válidas independentemente se um circuito estiver conectado em  $\Delta$  ou Y.

### 3.4 Análises por fase

Da análise nas seções 3.1 e 3.2, observamos que em circuitos trifásicos balanceados as correntes e tensões em cada fase são iguais em magnitude e deslocadas entre si em  $120^\circ$  elétricos. Esta característica resulta num procedimento simplificado para a análise de circuitos trifásicos equilibrados. Neste procedimento é necessário apenas calcular os resultados em uma fase e subseqüentemente prever resultados nas outras fases usando a relação que existe entre as quantidades nas outras fases. Essas relações foram derivadas nas seções 3.1 e 3.2. O exemplo abaixo descreve a aplicação do procedimento.

#### Exemplo 3.1

$150 + j50 \Omega/\phi$ ; A carga 2 é conectada  $\Delta$  com uma impedância de  $900 + j600 \Omega/\phi$ ; E a carga 3 é de 95,04 kVA a 0,6 pf de diâmetro. As cargas são alimentadas a partir de uma linha de distribuição com uma impedância de  $3 + j24 \Omega/\phi$ . A magnitude da tensão de fase na extremidade de carga da linha é 4,8 kV.

- Calcule a potência complexa total no terminal emissor da linha.
- Qual a percentagem da potência média no terminal emissor da linha é entregue à carga?

#### Solução:

Primeiramente o circuito equivalente por fase é construído. Para a carga 1, uma carga equilibrada Y-conectada, a impedância por fase é  $150 + j50 \Omega$ . Para a carga 2, uma carga equilibrada conectada em  $\Delta$ , a impedância por fase é equivalente a uma carga conectada em Y igual a  $Z_\Delta / 3 = 300 + j200 \Omega$ . Vamos representar a carga 3 em termos da potência complexa que absorve por fase. Isto é dado por:

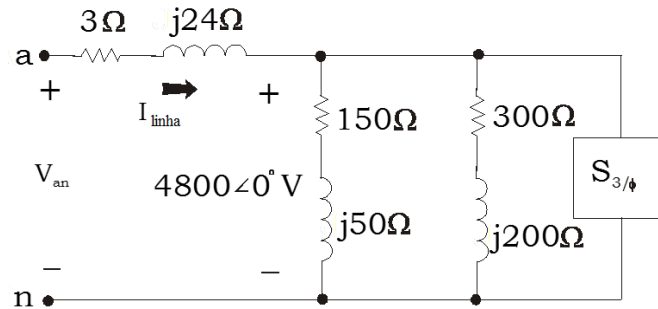
$$\begin{aligned} S_{3/\phi} &= \frac{95040}{3} (0.6 - j0.8) \\ &= 19,008 - j25,344VA \end{aligned}$$

A tensão entre os equivalentes por fase destas cargas foi especificada como 4800 V, que é a tensão de fase na extremidade de carga.



O circuito equivalente por fase é mostrado na Figura 8.

Figura 8: Circuito do exemplo 3.1.



$$\begin{aligned} I_{\ell} &= \frac{4800}{150 + j50} + \frac{4800}{300 + j200} + \frac{19,008 + j25,344}{4800} \\ &= 28.8 - j9.6 + 11.0769 - j7.3846 + 3.96 + j5.28 \\ &= 43.8369 - j11.7046 A (rms) \\ &= 45.3725 \angle -14.949^{\circ} A (rms) \end{aligned}$$

A corrente total  $I_{\ell}$  calculada acima foi obtida pela soma individual de todas as correntes através das três cargas. Para as cargas 1 e 2 foi utilizada a expressão  $\mathbf{I} = \mathbf{V}/\mathbf{Z}$ , e para a carga 3 a corrente foi determinada utilizando a seguinte expressão  $\mathbf{I} = (\mathbf{S}/\mathbf{V})^*$ .

A potência na linha é dada por,

$$\begin{aligned} P_{loss} &= 3 |I_{eff}|^2 R = 3(45.3725)^2 (3) = 18,528.04 \text{ W} \\ Q_{loss} &= 3 |I_{eff}|^2 X = 3(45.3725)^2 (24) = 148,224.34 \text{ var} \end{aligned}$$

Em cada carga teremos,

$$\begin{aligned} P_1 &= 3 |28.8 - j9.6|^2 (150) = 414,720 \text{ W} \\ Q_1 &= 3 |28.8 - j9.6|^2 (50) = 138,240 \text{ var (módulo)} \\ P_2 &= 3 |11.0769 - j7.3846|^2 (300) = 159,507.02 \text{ W} \\ Q_2 &= 3 |11.0769 - j7.3846|^2 (200) = 106,338.02 \text{ var (módulo)} \\ P_3 &= 95,040 (0.6) = 57,024 \text{ W} \\ Q_3 &= -95,040 (0.8) = -76,032 \text{ var} \\ S_{total} &= 636,251 + j168,546 \text{ VA (c arg afinal)} \end{aligned}$$

Verificando:



$$S_{total} = 3(4800)(43.8369 + j11.74046) = 631,251 + j168,546 VA$$

$$S_{sending} = 631,251 + j168,546 + 18,528.04 + j148,224.34 VA$$

$$= 649,779.04 + j316,770.34 VA$$

$$\% P = \frac{631,251}{649,779.04} \times 100 = 97.148$$

### Exemplo 3.2

Uma fonte trifásica equilibrada de 230 volts (rms) está fornecendo 6 kVA com fator de potência 0,83 indutivo para duas cargas paralelas conectadas em  $\Delta$ . Uma carga é puramente resistiva demandando 2 kW. Determine a impedância de fase da segunda carga

#### Solução:

A potência complexa total absorvida pela carga é dada por:

$$S = 6 \times 10^3 (0.83 + j0.5577) VA$$

Observe que é especificado no problema que:

$$\cos(\theta) = 0.83$$

$$\text{sen}(\theta) = \text{sen}(\cos^{-1}(0.83)) = 0.5577$$

$$S = 4980 + j3346.58 VA$$

A carga 1 absorve:

$$S_1 = 2000 + j0 VA.$$

Como resultado, a carga 2 só poderá demandar:

$$S - S_1 = 2980 + j3346.58 VA$$

A potência drenada pela carga 2, por fase, é de:

$$S_{2/\phi} = \frac{1}{3} (2980 + j3346.38) = 993.33 + j1115.5266 VA$$

$$S_{2/\phi} = \frac{V_{LL}^2}{Z_{\phi}^*}$$

Consequentemente,  $Z_{\phi}^* = \frac{(230)^2}{993.33 + j1115.5266} = 23.552 - j26.449 \Omega$ . Logo:

$$Z_{\phi} = 23.552 + j26.449 \Omega$$





### 3.5 Problemas

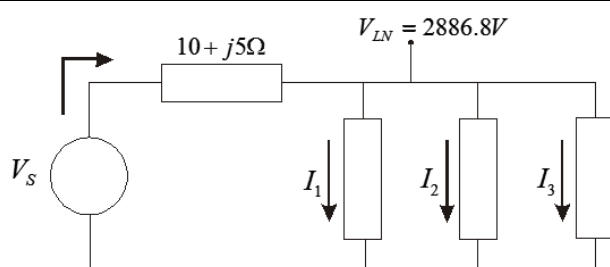
#### Problema 1

Cargas trifásicas estão conectadas em paralelo. Uma carga tem característica puramente resistiva conectada em Y, demandando 300kW. A segunda é carga tem característica puramente indutiva de 300kvar conectada em Y. A terceira é uma carga puramente capacitiva 300kvar conectada em Y. A tensão entre fases na carga é 5kV. Uma linha de distribuição trifásica que fornece esta carga tem uma impedância de  $10 + j5$  ohms por fase.

- Calcule as correntes drenadas por cada carga (módulo e fase).
- Calcular o fator de potência de cada carga. Lembre-se que os fatores de potência não-unitários também devem incluir se eles estão atrasados ou adiantados.
- Qual é o fator de potência da carga equivalente? Ou seja, qual é o fator de potência visto pela linha de transmissão no terminal da carga?
- Calcule a potência ativa e reativa fornecida no terminal transmissor da linha de distribuição.

#### Solução:

Figura 9: Circuito do exemplo 3.1.



$$(a) V_{carga} = \frac{5kV}{\sqrt{3}} = 2886,8\angle 0^\circ$$

Observe que:

$$S = V \times I^* = I = \left( \frac{S}{V} \right)^*, S = \frac{S_{3\phi}}{3}$$

Assim:

$$S_1 = 100 \times 10^3 W, S_2 = j100 \times 10^3 VAR, S_3 = -j100 \times 10^3 VAR.$$

$$\text{Para a carga puramente resistiva: } I_2 = \left( \frac{S_1}{V_{carga}} \right)^* = \frac{100 \times 10^3}{2886,8} = 34,64\angle 0^\circ A$$

$$\text{Para a carga puramente indutiva: } I_2 = \left( \frac{S_1}{V_{carga}} \right)^* = \frac{-j100 \times 10^3}{2886,8} = 34,64\angle -90^\circ A$$

$$\text{Para a carga puramente capacitiva: } I_2 = \left( \frac{S_1}{V_{carga}} \right)^* = \frac{j100 \times 10^3}{2886,8} = 34,64\angle 90^\circ A$$



Observe acima que para a carga resistiva a corrente e a tensão estão em fase. Para a carga indutiva a corrente está atrasada de  $90^\circ$  elétricos em relação à tensão e o contrário se observa para a carga capacitiva.

(b) Carga 1:  $fp_1 = 1,0$

Carga 2:  $fp_2 = 0$  – atrasado

Carga 3:  $pf_3 = 0$  – atrasado

(c) Ângulo da corrente com respeito a  $V_{carga} = 2886,8\angle 0^\circ$

$$I_{carga} = I_1 + I_2 + I_3 = 34,64\angle 0^\circ - j34,64 + j34,64 = 34,64\angle 0^\circ$$

Então  $V_{Load}$  e  $I_{Load}$  estão em fase

$$fp_{Carga} = 1,0$$

(d)  $V_s = V_{Carga} + I_{Carga}(Z_t) = 2886,8 + (34,64\angle 0^\circ) \times (10 + j5) = 3237,8\angle 3,07^\circ [V]$

$$S_{3\phi} = 3V_s I_{Carga} = 3 \times (3237,8\angle 3,07^\circ) \times (34,64\angle 0^\circ) = 336,472\angle 3,07^\circ [VA]$$

$$P_{3\phi} = 335,99kW, \quad Q_{3\phi} = 18,02k \text{ var}$$

Alternativamente, pode-se calcular as perdas e adicionar à carga:

$$S_{Perda(3\phi)} = 3(I_{Load} |^2 Z_t) = 3(34,64)^2 \cdot (10 + j5) = 35999,9 + j17998,9$$

$$S_{3\phi} = S_{Carga(3\phi)} + S_{Perda(3\phi)} = 300 \times 10^3 + 35997,9 + j17998,9VA$$

$$P_{3\phi} = 335,99kW$$

$$Q_{3\phi} = 18,0k \text{ var}$$

## Problema 2

Uma carga trifásica tem uma impedância por fase, conectada em Y, de  $100 + j30\Omega$ . A magnitude da tensão entre fases na carga é de 1500V. A linha de distribuição trifásica que fornece esta carga tem uma impedância de  $10 + j5\Omega / \phi$ .

(a) Calcule a magnitude da tensão entre fases no terminal emissor da linha de distribuição.

(b) Calcule a potência ativa e reativa fornecida no terminal emissor da linha de distribuição.

**Solução:**

$$(a) V_{AN} = \frac{1500}{\sqrt{3}} = 866,025V \Rightarrow I_A = \frac{V_{AN}}{Z_{Carga}} = \frac{866,025}{100 + j30} = 7,945 - j2,384A = 8,295\angle -16,7^\circ A$$

$$V_{AN\_Emissor} = V_{AN} + I_A \times Z_{Linha} = 866,025\angle 0^\circ + (8,295\angle -16,7^\circ) \times (10 + j5) \\ = 957,39 + j15,89 = 957,53\angle 0,95^\circ V$$

$$|V_{AB\_Emissor}| = 957,53 \times \sqrt{3} = 1658,5V$$

$$(b) S = 3 \times V_{AN\_Emissor} \times I_a^* = 3 \times (957,53\angle 0,95^\circ) \times (8,295\angle 16,7^\circ) = 22706,5 + j7224,7VA$$

$$P = 22,706kW, \quad Q = 7,225k \text{ var}$$



### Problema 3

Uma carga trifásica demanda 100kVA com fator de potência 0,7 em atraso. A magnitude da tensão entre fases na carga é de 1500V. A linha de distribuição trifásica que atende a esta carga tem uma impedância de  $10 + j5\Omega/\phi$ .

- (a) Calcule a magnitude da tensão entre fases no terminal emissor da linha de distribuição.  
(b) Calcule a potência ativa e reativa fornecida no terminal emissor da linha de distribuição.

#### Solução:

a) Observe que  $\theta = \cos^{-1}(0,7) = 45,57^\circ$  elétricos (o ângulo é positivo devido ao fato de potência ser atrasado), e  $\sin(45,7) = 0,714$ .

$$V_{an} = \frac{1500}{\sqrt{3}} = 866,025 \angle 0^\circ V, \quad S_{1\phi} = \frac{100 \times 10^3}{3} (0,7 + j0,714) VA$$

$$I_L = \left( \frac{S_{1\phi}}{V_{an}} \right)^* = \frac{33,3 \times 10^3 \times (0,7 - j0,714)}{866,025} = 38,45 \angle -45,57^\circ A$$

$$V_{an\_emissor} = V_{an} + I_L \cdot Z_L = 866,025 \angle 0^\circ + 38,45 \angle -45,57^\circ \cdot (10 + j5) = 1279,2 \angle -6,211^\circ$$

$$|V_{AB\_emissor}| = \sqrt{3} \times 1279,2 = 2215,3V$$

b)

$$S_{emissor} = 3 \cdot (V_{an\_emissor}) \times (I_L)^* = 3(1279,2 \angle -6,211^\circ) \times (38,45 \angle -45,57^\circ) \\ = 147,556 \angle 39,36^\circ VA$$

$$P_{emissor} = 114,09 kW, \quad Q_{emissor} = 93,58 k var$$

### Problema 4

A potência complexa absorvida por uma carga trifásica é 1500kVA com fator de potência 0.8 atrasado, logo:

$$P_{\phi} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad Q_{\phi} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Se a tensão de linha na carga no problema 1 for 8660,2540 V, qual será a magnitude da tensão em cada fase da carga, se a carga for conectada em delta ou se a carga está conectada em Y?

$$\text{Delta: } |V_d| = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \text{Y: } |V_y| = \underline{\hspace{2cm}}$$

Qual é a magnitude de corrente de linha demandada pela carga?

$$|I_L| = \underline{\hspace{2cm}}$$



### Solução:

A potência complexa absorvida pela carga trifásica é 1500kVA com fator de potência 0,8 atrasado.

Observe que  $\theta = \cos^{-1}(0,8) = 36,87^\circ$  elétricos (o ângulo é positivo devido o fator de potência ser atrasado), e  $\sin(36,87) = 0,6$ . Então  $P_{1\phi} = 1500(0,8)/3 = 400 \text{ kW}$ ,  $Q_{1\phi} = 1500(0,6)/3 = 300 \text{ kVar}$ .

$$P_{1\phi} = 400 \text{ kW}, Q_{1\phi} = 300 \text{ kVar}$$

Se a tensão entre fases na carga do problema 1 for 8660,2540 V, qual é o módulo da tensão em cada fase da carga, se a carga for conectada da seguinte forma,

$$|V_{\Delta}| = 8660,254 \text{ V} \quad |V_y| = 5000 \text{ V} = \frac{8660,254}{\sqrt{3}}$$

Qual é o módulo da corrente de linha demandada pela carga?

$$|I_L| = 100 \text{ A}$$

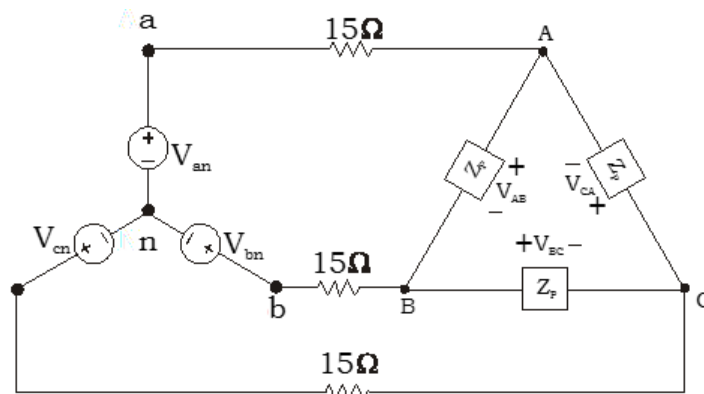
$$|I_L| = \frac{1500 \times 10^3}{\sqrt{3} \times 8660,254}$$

### Problema 5

No circuito mostrado abaixo,  $V_{an} = 12000 + j0 \text{ V (rms)}$ . Assuma sequência de fase positiva. A fonte equilibrada fornece 1,5MW e 0,3Mvar para a carga trifásica equilibrada. Encontrar:

- (a) A corrente de linha eficaz.
- (b)  $Z_p$

Figura 10: Circuito do problema 5.



### Solução:

$$(a) S_{3\phi} = (1,5 + j0,3) * 10^6 \text{ VA}$$

$$S_{1\phi} = \frac{1}{3} (1,5 + j0,3) * 10^6 \text{ VA}$$



$$V_{an} I_{an}^* = S_{1\phi} = 12000 \times I_{an}^*$$

$$I_{an}^* = \frac{(1,5 + j0,3) \times 10^6}{3 \times 12000} = 42,492 \angle 11,31^\circ \text{ A}$$

$$I_{an} = 42,492 \angle -11,31^\circ \text{ A}$$

$$(b) \quad Z_p = 3Z_{py}$$

$$Z_{py} = \frac{V_{an}}{I_{aA}}$$

$$V_{AN} = V_{aN} - (I_{aA}) \times 15 = 12000 - (42,492 \angle -11,31^\circ) \times 15 = 11375,68 \angle 0,6296^\circ \text{ V}$$

$$Z_{py} = \frac{11375,68 \angle 0,6296^\circ}{42,492 \angle -11,31^\circ} = 267,7135 \angle 11,939^\circ$$

$$Z_{py} = 3 \times 267,7135 \angle 11,939^\circ = 803,1405 \angle 11,939^\circ \Omega$$

### Problema 6

Uma fonte trifásica está alimentando uma carga trifásica equilibrada sobre uma linha de transmissão com impedância de  $Z_L = 2 + j20$  ohms por fase. A tensão na extremidade da fonte da linha de transmissão é  $2887 \angle 0^\circ$  volts de fase. A corrente fornecida através da linha de transmissão é  $I_L = 100 \angle -30^\circ$  amperes.

- Determine o fator de potência visto pela fonte e especifique se ele está adiantado ou atrasado.
- Determine a tensão (de fase) na carga.
- Determine o fator de potência da carga e especifique se a carga é:  
Adiantado ou atrasado;  
Indutivo ou capacitivo
- Determine a potência ativa e reativa consumida pela carga;

### Solução:

- $\text{pf} = \cos(30) = 0,8660$ , este é atrasado.
- $V_{\text{Carga}} = 2887 \angle 0 - 100 \angle -30 \times (2 + j20) = 713,8 - j1632 = 2366,5 \angle -43,6$
- Ângulo do fator de potência = ângulo no qual a tensão está adiantada da corrente =  $-43,6 - (-30) = -13,6$ , então  $\text{fp} = \cos(-13,6) = 0,972$ , ... e a corrente está adiantada em relação a tensão! Isto significa que o fator de potência é adiantado (parte a) e a carga só poderá ser capacitiva (parte b).
- $S = 3V_{\text{Larga}} \times (I)^* = 3(2366,5 \angle -43,6) \times (100 \angle +30) = 690044 - j166939 = 709,950 \angle -13,6 \text{ kVA}$



### Problema 7

Uma carga trifásica equilibrada com um fator de potência de 0,8 atrasado é alimentada por uma linha de transmissão que transporta 300 ampères a 115 kV entre fases. Calcular a potência ativa e reativa trifásica fornecida à carga.

#### Solução:

$$S_{3\phi} = \sqrt{3} \times |V_{LL}| \times |I| = (\sqrt{3}) \times (115 \cdot 10^3) \times (300) = 59,756 \text{ MVA}$$

$$fp = 0,8 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(0,8) = 36,9^\circ \Rightarrow \text{sen}(\theta) = 0,6$$

$$P = (59,756) \times (0,8) = 47,8 \text{ MW}$$

$$Q = (59,756) \times (0,6) = 35,879 \text{ M var}$$

### Problema 8

Uma carga equilibrada, trifásica conectada em delta consome 50 - j20 kVA em uma tensão entre fases de 13,8 kV. Calcular a impedância por fase desta carga assumindo uma conexão em série entre R e X.

#### Solução:

$$S = \frac{|V_{LL}|^2}{Z^*} \Rightarrow Z = \frac{|V_{LL}|^2}{S^*} = \frac{(13,8 \cdot 10^3)^2}{(50 + j20) \cdot 10^3} = 3283 - j1313 \Omega$$

$$Z_{\Delta} = 3 \cdot Z_Y \Rightarrow Z_{\Delta} = 3 \cdot (3283 - j1313) = 9849 - j3939 \Omega$$

$$R = 9849 \Omega$$

$$X = 3939 \Omega (\text{Capacitivo})$$

### Problema 9

Uma carga trifásica conectada em estrela com impedância de  $Z_1 = 200 + j50$  ohms por fase é conectada em paralelo com uma carga trifásica conectada em delta com impedância de  $Z_2 = 600 + j300$  ohms por fase. A carga é suprida por um gerador trifásico conectado em estrela que está diretamente interconectado com as cargas (isto é, não há linha de transmissão entre o gerador e as cargas). O módulo da tensão do gerador é 13,8 kV de linha. Suponha que a tensão de fase para neutro no gerador é a referência de ângulo. Tendo em vista os dados acima, considere:

- Desenhe o circuito trifásico. Identifique claramente os valores numéricos de um fasor da tensão de fase e uma impedância monofásica para cada uma das cargas 1 e 2;
- Desenhe o circuito por fase. Identifique claramente os valores numéricos do fasor da fonte de tensão e as impedâncias por fase das cargas 1 e 2;
- Calcule a potência complexa trifásica consumida por cada carga e a potência trifásica total complexa consumida pelas duas cargas;
- Mostre que a potência trifásica total e complexa consumida pelas duas cargas pode ser calculada usando a corrente de linha e o valor da tensão entre linhas da fonte.



## Solução:

Figura 11: Solução item a) do problema 9.

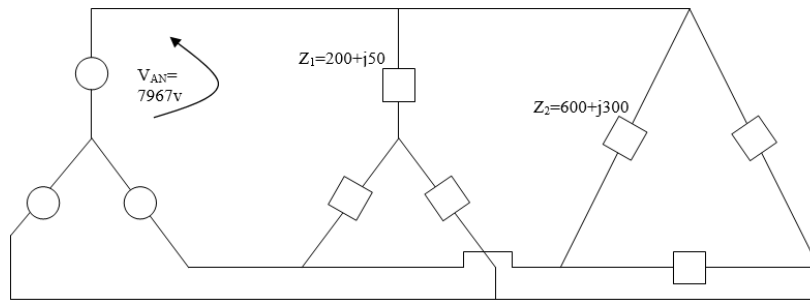
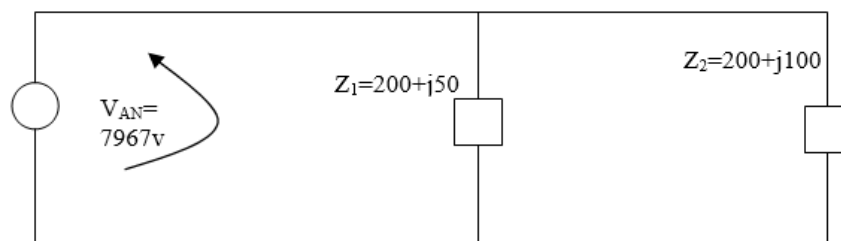


Figura 12: Solução item b) do problema 9.



c) Podemos usar  $S_1 = 3|V_{AN}|^2/Z_1^*$ ,  $S_2 = 3|V_{AN}|^2/Z_2^*$ , ou podemos obter a corrente. Resolveremos pela corrente.

$$I_1 = V_{AN}/Z_1 = 7967/(200 + j50) = 37,4918 - j9,3729,$$

$$S_1 = 3V_{AN}(I_1)^* = 3(7967)(37,4918 + j9,3729) = (896,09 + j224,02)\text{kva}$$

$$P_1 = 896,1 \text{ kW},$$

$$Q_1 = 224,0 \text{ kVAR}$$

$$I_2 = V_{AN}/Z_2 = 7967/(200 + j100) = 31,8680 - j15,9340$$

$$S_2 = 3V_{AN}(I_2)^* = 3(7967)(31,8680 + j15,9340) = (761,68e + j380,84)\text{kva}$$

$$P_2 = 761,7 \text{ kW},$$

$$Q_2 = 380,8 \text{ kVAR}$$

$$S_{\text{Total}} = S_1 + S_2 = 1657,8 + j604,86$$

$$P_{\text{Total}} = 1657,8 \text{ kW}, Q_{\text{Total}} = 604,9 \text{ kVAR}$$

$$I_T = I_1 + I_2 = 69,3598 - j25,3069 = 73,83 \angle -20,05, |V_{\text{Line}}| = 13,800$$

d)  $S_{\text{Total}} = (\sqrt{3})(13800)(73,83)\{\cos(20,05) + j\sin(20,05)\} = 1657,8 + j604,9$

## Problema 10

Considere uma fonte trifásica balanceada que forneça uma carga balanceada em Y ou  $\Delta$  com as seguintes tensões instantâneas e correntes.

$$v_{an} = \sqrt{2}|V_p| \cos(\omega t + \theta_v) \quad i_a = \sqrt{2}|I_p| \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$v_{bn} = \sqrt{2}|V_p| \cos(\omega t + \theta_v - 120^\circ) \quad i_b = \sqrt{2}|I_p| \cos(\omega t + \theta_i - 120^\circ)$$

$$v_{cn} = \sqrt{2}|V_p| \cos(\omega t + \theta_v - 240^\circ) \quad i_c = \sqrt{2}|I_p| \cos(\omega t + \theta_i - 240^\circ)$$



Onde  $|V_p|$  e  $|I_p|$  são módulos da tensão e corrente de fase em rms, respectivamente. Mostre que a potência instantânea total fornecida à carga, como a soma das potências instantâneas de cada fase, é uma constante.

**Solução:**

Considere uma fonte trifásica equilibrada que fornece uma carga balanceada conectada em Y ou  $\Delta$  com as seguintes tensões instantâneas:

$$v_{an} = \sqrt{2} |V_p| \cos(\omega t + \theta_v)$$

$$v_{bn} = \sqrt{2} |V_p| \cos(\omega t + \theta_v - 120^\circ)$$

$$v_{cn} = \sqrt{2} |V_p| \cos(\omega t + \theta_v - 240^\circ)$$

Para uma carga equilibrada as correntes de fase são:

$$i_a = \sqrt{2} |I_p| \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$i_b = \sqrt{2} |I_p| \cos(\omega t + \theta_i - 120^\circ)$$

$$i_c = \sqrt{2} |I_p| \cos(\omega t + \theta_i - 240^\circ)$$

Onde  $|V_p|$  e  $|I_p|$  são os módulos rms da tensão e da corrente de fase, respectivamente. A potência total instantânea é a soma das potências instantâneas e cada fase, dada por:

$$p_{3\phi} = v_{an} i_a + v_{bn} i_b + v_{cn} i_c$$

Substituindo as tensões e correntes instantâneas:

$$p_{3\phi} = 2|V_p||I_p| \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$+ 2|V_p||I_p| \cos(\omega t + \theta_v - 120^\circ) \cos(\omega t + \theta_i - 120^\circ)$$

$$+ 2|V_p||I_p| \cos(\omega t + \theta_v - 240^\circ) \cos(\omega t + \theta_i - 240^\circ)$$

Usando a identidade trigonométrica  $\cos(x) \cos(y) = \cos(x-y) + \cos(x+y)$

$$p_{3\phi} = |V_p||I_p| [\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)]$$

$$+ |V_p||I_p| [\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i - 240^\circ)]$$

$$+ |V_p||I_p| [\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i - 480^\circ)]$$

Os três termos de cosseno de dupla frequência estão defasados uns com os outros em  $120^\circ$  elétricos e somam-se a zero, e a potência instantânea trifásica é:

$$p_{3\phi} = 3|V_p||I_p| \cos \theta$$

$\theta = \theta_v - \theta_i$  é o ângulo entre a tensão de fase e a corrente de fase ou o ângulo de impedância.

**Problema 11**

Uma linha trifásica tem uma impedância de  $2 + j4$  ohms/fase, e uma linha alimenta duas cargas trifásicas equilibradas conectadas em paralelo. A primeira carga está conectada em Y e tem uma impedância de  $30 + j40$  ohms/fase. A segunda está conectada em delta e tem uma impedância de  $60 - j45$  ohms/fase. A linha é energizada na extremidade emissora de uma trifásica equilibrada de tensão de linha de 207,85 volts. Tomando a tensão de fase  $V_a$  como referência, determine.

a) A corrente, potência real e potência reativa extraída da oferta;





- b) A tensão de linha nas cargas combinadas;
- c) A corrente por fase em cada carga;
- d) As potências reais e reativas totais em cada carga e na linha.

**Solução:**

(a) A carga conectada em  $\Delta$  é transformada em um equivalente Y. A impedância por fase do equivalente Y é:

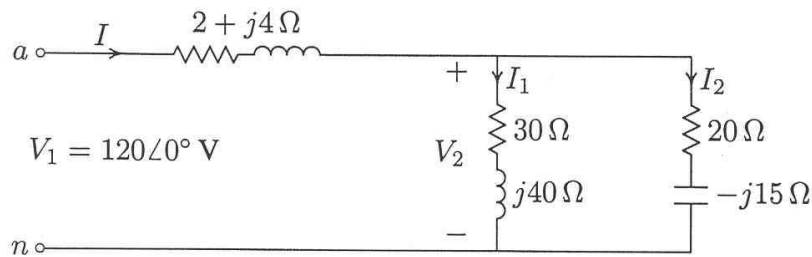
$$Z_2 = \frac{60 - j45}{3} = 20 - j15 \Omega$$

A tensão de fase é:

$$V_1 = \frac{207.85}{\sqrt{3}} = 120 \text{ V}$$

O circuito equivalente monofásico é mostrado na figura a abaixo.

**Figura 13: Circuito equivalente do problema 11.**



A impedância total é:

$$Z = 2 + j4 + \frac{(30 + j40)(20 - j15)}{(30 + j40) + (20 - j15)}$$

$$= 2 + j4 + 22 - j4 = 24 \Omega$$

Com a tensão de fase  $V_{an}$  como referência angular, a corrente na fase  $a$  é:

$$I = \frac{V_1}{Z} = \frac{120 \angle 0^\circ}{24} = 5 \text{ A}$$

A potência trifásica fornecida a carga é:

$$S = 3V_1 I^* = 3(120 \angle 0^\circ)(5 \angle 0^\circ) = 1800 \text{ W}$$

(b) A tensão de fase no terminal da carga é:

$$V_2 = 120 \angle 0^\circ - (2 + j4)(5 \angle 0^\circ) = 110 - j20$$

$$= 111.8 \angle -10.3^\circ \text{ V}$$

A tensão de linha no terminal da carga é:



$$V_{2ab} = \sqrt{3} \angle 30^\circ V_2 = \sqrt{3}(111.8) \angle 19.7^\circ = 193.64 \angle 19.7^\circ \text{ V}$$

(c) A corrente por fase na carga conectada em Y (carga 1) e na carga equivalente em Y da carga conectada em  $\Delta$  (carga 2) é:

$$I_1 = \frac{V_2}{Z_1} = \frac{110 - j20}{30 + j40} = 1 - j2 = 2.236 \angle -63.4^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V_2}{Z_2} = \frac{110 - j20}{20 - j15} = 4 + j2 = 4.472 \angle 26.56^\circ \text{ A}$$

A corrente de fase na carga originalmente conectada em  $\Delta$  é (isto é,  $I_{ab}$ ):

$$I_{ab} = \frac{I_2}{\sqrt{3} \angle -30^\circ} = \frac{4.472 \angle 26.56^\circ}{\sqrt{3} \angle -30^\circ} = 2.582 \angle 56.56^\circ \text{ A}$$

(d) A potência trifásica absorvida por cada carga é:

$$S_1 = 3V_2 I_1^* = 3(111.8 \angle -10.3^\circ)(2.236 \angle 63.4^\circ) = 450 \text{ W} + j600 \text{ var}$$

$$S_2 = 3V_2 I_2^* = 3(111.8 \angle -10.3^\circ)(4.472 \angle -26.56^\circ) = 1200 \text{ W} - j900 \text{ var}$$

A potência trifásica absorvida pela linha (perda na linha) é

$$S_L = 3(R_L + jX_L)|I|^2 = 3(2 + j4)(5)^2 = 150 \text{ W} + j300 \text{ var}$$

É claro que a soma das potências de carga e das perdas de linha é igual à potência fornecida pela alimentação, isto é:

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_L &= (450 + j600) + (1200 - j900) + (150 + j300) \\ &= 1800 \text{ W} + j0 \text{ var} \end{aligned}$$

## Problema 12

Uma linha trifásica apresenta uma impedância de  $0,4 + j2,7 \Omega/\phi$ . A linha alimenta duas cargas trifásicas equilibradas conectadas em paralelo. A primeira carga está absorvendo 560,1 kVA com fator de potência de 0,707 atrasado. A segunda carga absorve 132 kW com fator de potência unitário. A tensão de linha na extremidade da carga é 3810.5 volts. Determinar:

- A magnitude da tensão de linha no final da fonte da linha.
- Total de perda de potência real e reativa na linha.
- Potência real e potência reativa fornecida na extremidade de envio da linha

### Solução:

(a) A tensão de fase no terminal da carga é:

$$V_2 = \frac{3810.5}{\sqrt{3}} = 2200 \text{ V}$$

A potência complexa total é:

$$\begin{aligned} S_{R(3\phi)} &= 560.1(0.707 + j0.707) + 132 = 528 + j396 \\ &= 660 \angle 36.87^\circ \text{ kVA} \end{aligned}$$



Com a tensão de fase  $V_2$  como referência, a corrente na linha é:

$$I = \frac{S_{R(3\phi)}^*}{3V_2^*} = \frac{660,000 \angle -36.87^\circ}{3(2200 \angle 0^\circ)} = 100 \angle -36.87^\circ \text{ A}$$

A tensão de fase no terminal emissor é:

$$V_1 = 2200 \angle 0^\circ + (0.4 + j2.7)100 \angle -36.87^\circ = 2401.7 \angle 4.58^\circ \text{ V}$$

O módulo da tensão de linha no terminal emissor é:

$$|V_{1L}| = \sqrt{3}|V_1| = \sqrt{3}(2401.7) = 4160 \text{ V}$$

(b) A perda trifásica na linha é:

$$\begin{aligned} S_{L(3\phi)} &= 3R|I|^2 + j3X|I|^2 = 3(0.4)(100)^2 + j3(2.7)(100)^2 \\ &= 12 \text{ kW} + j81 \text{ kvar} \end{aligned}$$

(c) A potência trifásica suprida pela fonte é:

$$S_{S(3\phi)} = 3V_1 I^* = 3(2401.7 \angle 4.58^\circ)(100 \angle 36.87^\circ) = 540 \text{ kW} + j477 \text{ kvar}$$

É claro que a soma das potências da carga e das perdas de linha é igual à potência fornecida pela fonte, ou seja:

$$S_{S(3\phi)} = S_{R(3\phi)} + S_{L(3\phi)} = (528 + j396) + (12 + j81) = 540 \text{ kW} + j477 \text{ kvar}$$



## 4 Componentes Simétricas Aplicadas a Sistemas de Potência

Em 1918, Charles Fortescue apresentou um artigo ao Instituto Americano de Engenheiros Elétricos em Atlantic City, descrevendo como um sistema de  $n$  fasores não desequilibrados, mas relacionados, podem ser representados por  $n$  sistemas de fasores balanceados. Utilizando este princípio, qualquer sistema trifásico não equilibrado pode ser representado por três redes de *sequência equilibradas*.

A teoria de componentes simétricas e a síntese de redes de sequência para sistemas de potência trifásicos são instrumentais para resolver a maioria dos problemas em circuitos desequilibrados, como falhas assimétricas e de circuito aberto. Componentes simétricas e redes de sequência também são vitais para a compreensão das condições de operação desequilibradas de um sistema equilibrado e o comportamento e influência de tensões e correntes harmônicas.

O conhecimento e o uso de componentes simétricas possibilitam aos analistas entender o comportamento de um sistema de potência trifásico desequilibrado. É este conhecimento que permite ao engenheiro entender completamente o comportamento do sistema trifásico em condições desequilibradas. Como um benefício adicional para a aplicação dessas abordagens, os erros comumente cometidos em cálculos desequilibrados do sistema serão significativamente diminuídos se não totalmente eliminados.

Muitos cálculos do sistema de energia envolvem a análise de um sistema trifásico equilibrado. Quando este é o caso, apenas uma fase precisa ser analisada. A simetria do problema permite que o comportamento das outras duas fases seja determinado com base no comportamento calculado da primeira fase. Esta abordagem equivalente de fase única é tomada para simplificar o processo de cálculo.

Mas quando as condições a serem analisadas resultam em um sistema desequilibrado de fasores de tensão e corrente, a abordagem equivalente de fase única (unifilar) não pode ser aplicada diretamente. Um exemplo deste tipo é a determinação da resposta do sistema a um curto-circuito desequilibrado, como uma falha fase-terra. A opção de analisar o sistema desequilibrado como um problema trifásico não é atraente, uma vez que a matemática resultante seria pesada e muito difícil de resolver.

O uso de uma abordagem monofásica seria possível se os fasores desequilibrados pudessem ser resolvidos em componentes equilibrados. A teoria de componentes simétricas de Charles Fortescue nos mostra que é sempre possível resolver um conjunto desequilibrado de fasores de tensão ou de corrente em um conjunto de componentes equilibrados. Antes de desenvolver os componentes simétricos de um conjunto desequilibrado de fasores trifásicos, vejamos um exemplo mais simples de resolução de um vetor em componentes.

Em resumo, no desenvolvimento de estudos em regime permanente para sistemas de transmissão em alta tensão é usual considerar o sistema equilibrado, possibilitando a representação deste apenas pela sua rede equilibrada, portanto, apenas uma fase poderá ser utilizada (representação unifilar).

Para estudos de faltas simétricas (curtos-circuitos simétricos e equilibrados, tais como curtos-circuitos trifásicos), o sistema não tem sua característica equilibrada alterada, portanto, representa-se, para fins de estudos, o sistema por apenas uma de suas fases.

Entretanto, para a análise de faltas assimétricas (curtos-circuitos monofásicos, bifásicos e bifásicos envolvendo a terra) ou para condições severas de desequilíbrio, as três fases já não mais apresentarão a mesma impedância, o que impossibilita que o sistema seja representado apenas por uma de suas fases.



Para tal situação, a forma mais direta e elegante disponível para analisar circuitos trifásicos desequilibrados é utilizando a Teoria das Componentes Simétricas.

A metodologia foi desenvolvida por Charles Fortescue e apresentado pelo artigo científico cuja primeira página é apresentada na figura 1 abaixo. O referido artigo científico foi apresentado em uma convenção em 1918. Este material de apoio tem o objetivo de apresentar e discutir, de forma concisa, o método das componentes simétricas aplicadas a sistemas de potência.

O presente documento se trata de uma livre tradução das referências apresentadas ao final deste.

Figura 14: Página inicial do paper *Method of Symmetrical Co-ordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks*.

---

*Presented at the 34th Annual Convention of  
the American Institute of Electrical Engineers,  
Atlantic City, N. J., June 28, 1918.*

---

Copyright 1918. By A. I. E. E.

## **METHOD OF SYMMETRICAL CO-ORDINATES APPLIED TO THE SOLUTION OF POLYPHASE NETWORKS**

BY C. L. FORTESCUE

### **ABSTRACT OF PAPER**

In the introduction a general discussion of unsymmetrical systems of co-planar vectors leads to the conclusion that they may be represented by symmetrical systems of the same number of vectors, the number of symmetrical systems required to define the given system being equal to its degrees of freedom. A few trigonometrical theorems which are to be used in the paper are called to mind. The paper is subdivided into three parts, an abstract of which follows. It is recommended that only that part of Part I up to formula (33) and the portion dealing with star-delta transformations be read before proceeding with Part II.

*Part I* deals with the resolution of unsymmetrical groups of numbers into symmetrical groups. These numbers may represent rotating vectors of systems of operators. A new operator termed the sequence operator is introduced which simplifies the manipulation. Formulas are derived for three-phase circuits. Star-delta transformations for symmetrical co-ordinates are given and expressions for power deduced. A short discussion of harmonics in three-phase systems is given.

*Part II* deals with the practical application of this method to symmetrical rotating machines operating on unsymmetrical circuits. General formulas are derived and such special cases, as the single-phase induction motor, synchronous motor-generator, phase converters of various types, are discussed.

---

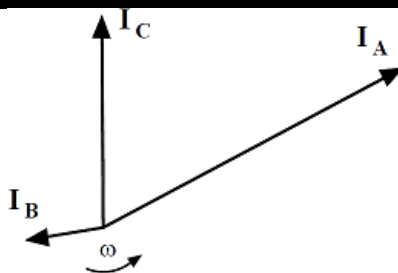
Podemos considerar os fasores de tensão ou de corrente, uma vez que a mesma metodologia se aplica a ambos. Como a corrente (o fluxo de cargas) é mais facilmente visível do que a tensão (a diferença de dois potenciais elétricos), usaremos corrente para o exemplo que se segue



## 4.1 Aplicação de Componentes Simétricas a um Sistema de Potência Trifásico

Considere o conjunto desequilibrado de fasores de corrente mostrado na Figura 15.

Figura 15: Conjunto de fasores de correntes de um sistema trifásico desequilibrado.



Os fasores estão girando no sentido anti-horário com uma determinada frequência angular, dada pela frequência fundamental do sistema. Para uma frequência fundamental de 60Hz, a velocidade angular de um conjunto de fasores será de  $\omega = 2\pi f = 2\pi(60) \cong 377$  radianos/s. Todos os fasores giram no anti-horário, sempre!. Este é um fato que deverá sempre ser lembrado para o total entendimento do conceito de componentes simétricas.

Uma vez que os fasores de correntes apresentados na Figura 15 são desequilibrados, o que significa que cada um dos fasores poderão apresentar valores diferentes de magnitude e abertura angular em relação aos outros dois fasores, não nos será possível analisar o sistema considerando apenas uma fase equivalente. Entretanto, será possível resolver o sistema desequilibrado em uma forma adequada de conjuntos de componentes aos quais estes poderão ser analisados de forma unifilar, simplificando muito o processo de análise.

Para um sistema trifásico de fasores de corrente precisamos de três conjuntos de componentes para representar os fasores desequilibrados.

Os requisitos necessários para essas três componentes representantes de um sistema desequilibrado são:

- As magnitudes de cada um dos fasores de um dado conjunto de componentes são iguais;
- A abertura angular entre quaisquer dois fasores num dado conjunto de componentes é igual.

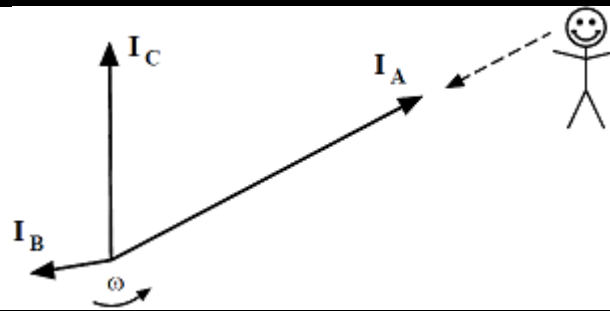
Assim sendo, tais componentes com os requisitos acima são denominados **Componentes Simétricas**.

Antes de determinar as componentes simétricas dos fasores desequilibrados, precisamos entender o conceito de sequência de fases. Muitas vezes, a sequência de fase é referida como rotação de fase, mas esta terminologia é muito enganosa e é tecnicamente incorreta. Na verdade, todos os fasores giram no sentido anti-horário - sempre. Enquanto o sentido de rotação nunca muda, a sequência dos fasores pode mudar.

Tomando como referência o desenho apresentado na Figura 16 abaixo, o observador está olhando diretamente para o fasor da fase A. O próximo fasor a ser observado pelo observador no ponto de observação será o correspondente à fase B. Finalmente, o fasor da fase C será o último a ser observado pelo observador no ponto de observação. Sendo assim, o fasor apresenta a sequência de observação ABC, definindo-se, assim o conjunto de componentes de sequência ABC ou sequência positiva ou sequência direta.

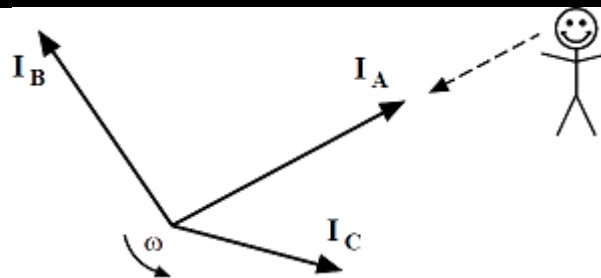


Figura 16: Caracterização da sequência de fase direta, ou sequência positiva.



Raciocinando de forma análoga, a partir da Figura 17, chegamos ao entendimento da sequência de fase ACB ou sequência inversa ou sequência de fase negativa.

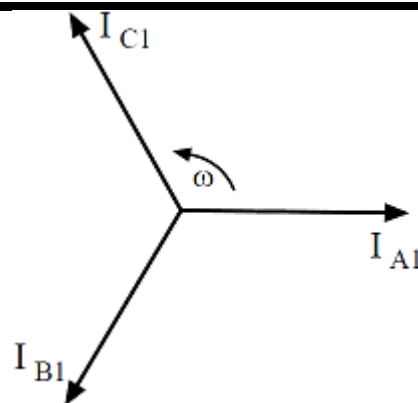
Figura 17: Caracterização da sequência de fase inversa, ou sequência negativa.



Observe que em ambas as Figura 16 e Figura 17, os fasores giram no mesmo sentido (anti-horário). Ou seja, a sequência de fases é diferente para os dois conjuntos de fasores, apesar de eles apresentarem o mesmo sentido de rotação.

Agora podemos definir os três conjuntos de componentes equilibrados para representar o conjunto desequilibrado de fasores de corrente mostrado na Figura 15. O primeiro conjunto será um conjunto equilibrado de fasores com a mesma sequência de fases que as correntes desequilibradas. Chamaremos este conjunto de componentes de **sequência positiva**, e denotaremos os valores de sequência positiva com o subíndice 1, apresentado na Figura 18.

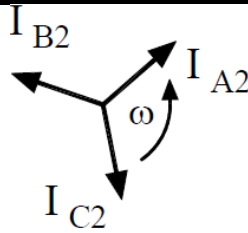
Figura 18: Caracterização da sequência de fase direta, ou sequência positiva.



O segundo conjunto de componentes será um conjunto equilibrado de fasores com sequência de fase A-C-B. Chamaremos este conjunto de componentes de **sequência negativa**, e indicaremos estes fasores com o subíndice 2, conforme apresentado na Figura 19.



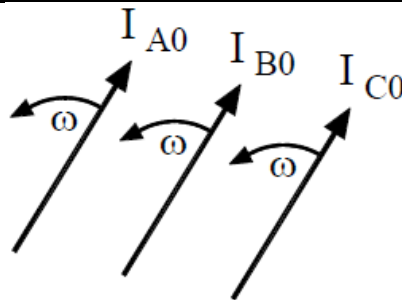
Figura 19: Caracterização da sequência de fase inversa, ou sequência negativa.



Embora módulos dos fasores de sequência positiva e sequência negativa sejam diferentes, cada conjunto contém três fasores de módulo igual. Também cada fasor na sequência positiva e na sequência negativa é separado dos outros dois fasores por deslocamentos angulares iguais ( $120^\circ$ ). Isto cumpre a exigência de que cada conjunto de componentes seja equilibrado, ou simétrico.

O terceiro conjunto de componentes também deve ser equilibrado. Escolheremos um conjunto de componentes com módulos iguais e nenhum deslocamento angular entre as fases. Observe que uma separação angular de zero também cumpre a definição de equilíbrio, uma vez que o mesmo deslocamento angular existe entre quaisquer dois dos três fasores. Este conjunto de componentes é a **sequência zero**, e usamos o subíndice 0 para denotá-los.

Figura 20: Caracterização da sequência zero.



Estudando as componentes de sequência mostradas na Figura 18 a Figura 20 é evidente que podemos explorar a simetria dos sistemas para simplificar a nomenclatura. Podemos definir um operador **a** tal que a multiplicação de qualquer fasor por **a** simplesmente gira o fasor original por  $120^\circ$ . Pensando em termos de coordenadas polares, torna-se óbvio que o operador **a** deve ter um módulo unitário. Para atingir a rotação de  $120^\circ$ , o ângulo do operador **a** deve ser de  $120^\circ$ , uma vez que os ângulos são aditivos ao multiplicar os números em forma polar.

Portanto,

$$a = 1\angle 120^\circ = -0,5 + j0,866 \quad (59)$$

O operador **a** também pode ser expresso em forma retangular como:

$$a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (60)$$

Onde **j** =  $\sqrt{-1}$ . Assim como **a** pode ser pensado como um rotacionador de  $120^\circ$ , **j** pode ser visto como um rotacionador de  $90^\circ$ . Esta é uma jogada importante, pois torna o problema menos algébrico e mais visual e intuitivo.





As seguintes potências dos operadores  $j$  e  $a$  são úteis na visualização de como a multiplicação de um fasor por uma potência de um desses operadores manipula o fasor original. Deve ser lembrado que elevar ao quadrado um operador faz com que a sua rotação o dobro da original, e elevando ao cubo um operador repete sua rotação três vezes.

$$j^2 = 1\angle 90^\circ \times 1\angle 90^\circ = 1\angle 180^\circ = -1$$

$$j^3 = 1\angle 90^\circ \times 1\angle 90^\circ \times 1\angle 90^\circ = 1\angle 270^\circ = -j \quad (61)$$

$$j^4 = 1\angle 270^\circ \times 1\angle 90^\circ = 1\angle 360^\circ = 1$$

$$a^2 = a \times a = 1\angle 120^\circ \times 1\angle 120^\circ = 1\angle 240^\circ = 1\angle -120^\circ$$

$$a^2 = -0,5 - j0,866$$

$$a^3 = a \times a \times a = 1\angle 120^\circ \times 1\angle 120^\circ \times 1\angle 120^\circ = 1\angle 360^\circ = 1 \quad (62)$$

Usando o operador  $a$ , podemos eliminar a notação de subscrito duplo usada nas figuras 18 a 20, expressando cada fasor em termos do fasor de fase A. Este processo nos leva a um único equivalente de fase do sistema original - o objetivo que estávamos tentando alcançar.

Atualizando o índice das figuras de 18 a 20 em termos das quantidades da fase A, deixando cair o subscrito A e incorporando também o operador  $a$ , conforme apresentado nas figuras de 21 a 23 abaixo.

Figura 21: Representação das componentes de sequência positiva expresso em termos da fase A.

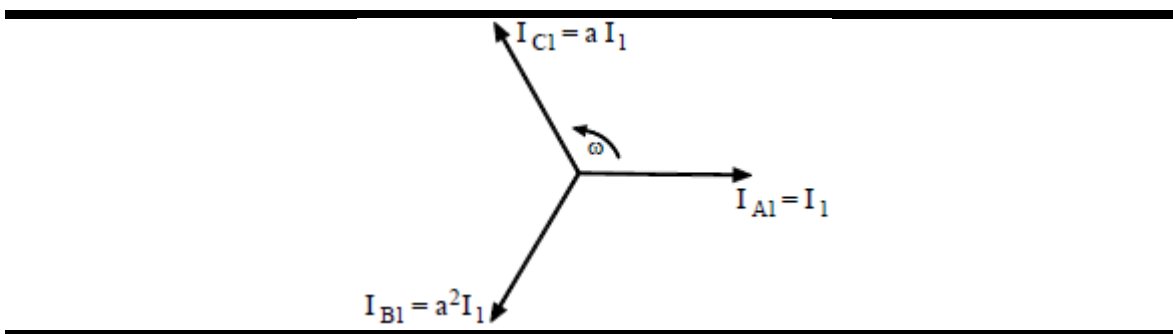


Figura 22: Representação das componentes de sequência negativa expresso em termos da fase A.

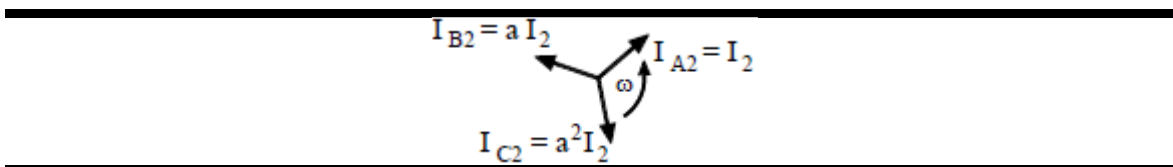
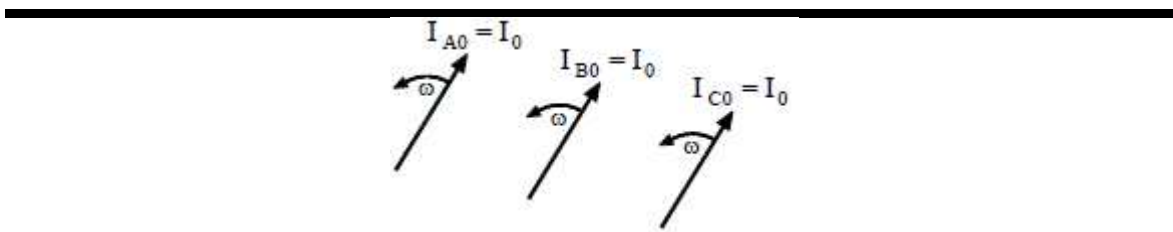


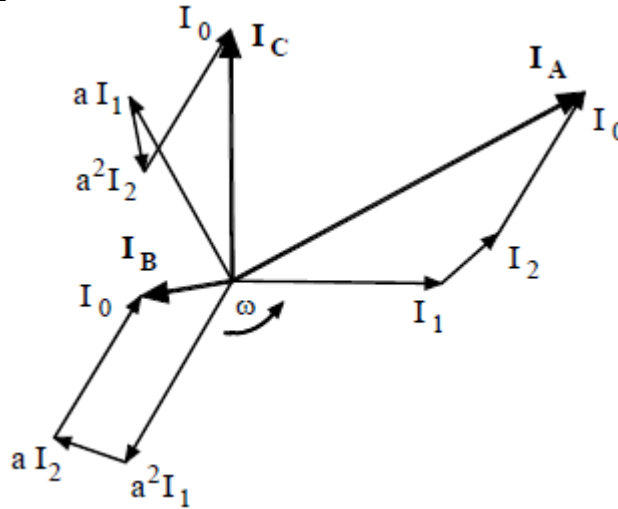
Figura 23: Representação das componentes de sequência zero expresso em termos da fase A.



É claro que as componentes simétricas devem satisfazer a restrição de que sua soma vetorial é igual ao conjunto original de fasores desequilibrados. Isto é mostrado graficamente na Figura 24.



Figura 24: Representação das componentes de sequência zero em expresso em termos da fase A.



Agora que um conjunto adequado de componentes para representar as correntes desequilibradas foi desenvolvido, um conjunto de equações de transformação devem ser estabelecidas.

Expressar as correntes desequilibradas como a soma de seus componentes fornece três das seis equações de transformação necessárias.

Uma das principais propriedades das componentes simétricas é apresentada na equação (63) abaixo.

$$1 + a + a^2 = 0 \quad (63)$$

A seguir, estabeleceremos as representações fasoriais para as componentes de sequência positiva, numericamente representados por:

$$\begin{aligned} I_{a1} &= I_1 \\ I_{b1} &= I_1 \angle -120^\circ = a^2 I_1 \\ I_{c1} &= I_1 \angle 120^\circ = a I_1 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} I_{a1} \\ I_{b1} \\ I_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} \times I_1 \quad (64)$$

Para a sequência negativa, numericamente temos:

$$\begin{aligned} I_{a2} &= I_2 \\ I_{b2} &= I_2 \angle 120^\circ = a I_2 \\ I_{c2} &= I_2 \angle -120^\circ = a^2 I_2 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} I_{a2} \\ I_{b2} \\ I_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix} \times I_2 \quad (65)$$

As componentes de sequência zero são numericamente representadas pelas equações abaixo:

$$\begin{aligned} I_{a0} &= I_0 \\ I_{b0} &= I_0 \\ I_{c0} &= I_0 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{b0} \\ I_{c0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times I_0 \quad (66)$$

Conhecendo-se as componentes simétricas de sequência, pode-se transformar qualquer sistema assimétrico em 3 sistemas simétricos, desde que os fasores tenham a mesma frequência, através do teorema de Fortescue, conforme a seguir:



$$\begin{aligned} I_a &= I_{a1} + I_{a2} + I_{a0} \\ I_b &= I_{b1} + I_{b2} + I_{b0} \\ I_c &= I_{c1} + I_{c2} + I_{c0} \end{aligned} \quad (67)$$

Utilizando-se das expressões anteriormente obtidas:

$$\begin{aligned} I_a &= I_1 + I_2 + I_0 \\ I_b &= a^2 I_1 + a I_2 + I_0 \\ I_c &= a I_1 + a^2 I_2 + I_0 \end{aligned} \quad (68)$$

Em forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (69)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (69) pelo inverso da matriz de coeficientes quadrados nos dá a solução para  $I_0$ ,  $I_1$  e  $I_2$ , temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (70)$$

Simplificando e trazendo o vetor  $I_0$ ,  $I_1$  e  $I_2$  para o lado esquerdo do sinal de igual, obtemos:

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (71)$$

Inverter a matriz de coeficientes quadrados dá:

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (72)$$

Escrevendo a equação (72) como três equações algébricas nos dá as três últimas equações de transformação necessárias.

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{3}(I_a + I_b + I_c) \\ I_1 &= \frac{1}{3}(I_a + aI_b + a^2I_c) \\ I_2 &= \frac{1}{3}(I_a + a^2I_b + aI_c) \end{aligned} \quad (73)$$

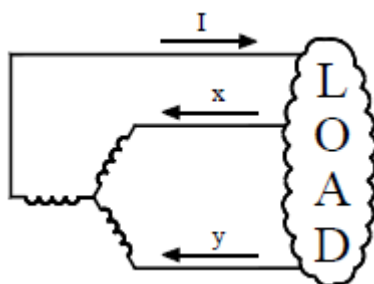
Usando as equações acima como equações de transformação, podemos aplicar a teoria de componentes simétricas a condições desequilibradas em sistemas de potência trifásicos. Mas antes de o fazer, devemos entender as características elétricas das correntes de sequência para que possamos entender como eles se comportam no sistema trifásico. Este conhecimento é essencial para a síntese adequada das redes de sequência.



## 4.2 Características elétricas das correntes de sequência

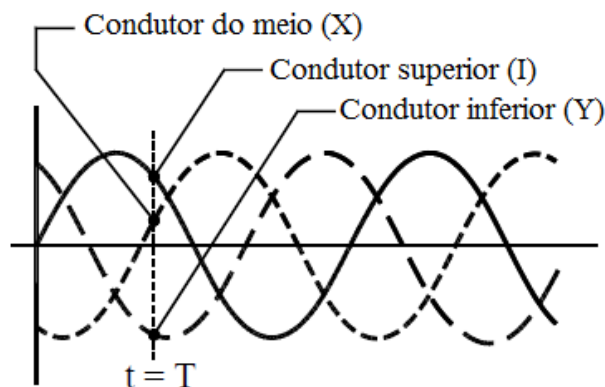
A figura abaixo ilustra uma fonte conectada em estrela alimentando uma carga qualquer. A carga é necessária para que exista um caminho fechado para que a corrente flua.

Figura 25: Fonte conectada em Y alimentando uma carga qualquer.



Se o condutor superior (I) está carregando uma corrente I da fonte para a carga, sabemos que a única maneira que a corrente pode fluir é se houver um caminho de retorno para a fonte. Quando há um deslocamento angular entre as correntes de linha ( $120^\circ$ ), os condutores do meio (X) e de baixo (Y) servem como o caminho de retorno para a corrente da fonte que flui no condutor superior. Escrevendo uma equação de nós usando a nuvem representando a carga como nó, vemos que  $I = x + y$ . Esta relação pode ser verificada graficamente desenhando as três correntes de linha no domínio do tempo. Em um tempo específico  $t = T$ , a soma dos valores instantâneos das correntes nos três condutores será igual a zero, coerente com a Lei Kirchhoff.

Figura 26: Correntes de linha no tempo.



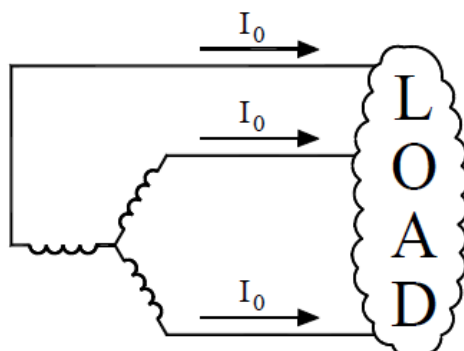
Pela Figura 26, fica claro que, em havendo defasagem angular entre as três correntes que fluem pelos condutores de um sistema trifásico, e sendo esta de  $120^\circ$  elétricos. Considerando sequência de fases positiva ou negativa, a corrente que é fornecida a uma carga flui por um condutor e retorna pelos outros dois condutores. Esta condição sempre será verdadeira para um sistema trifásico.

A corrente de sequência zero, no entanto, comporta-se de forma diferente. Não há deslocamento angular entre as fases, então qualquer corrente instantânea que flua pelo condutor superior também deve fluir nos condutores superior e inferior.



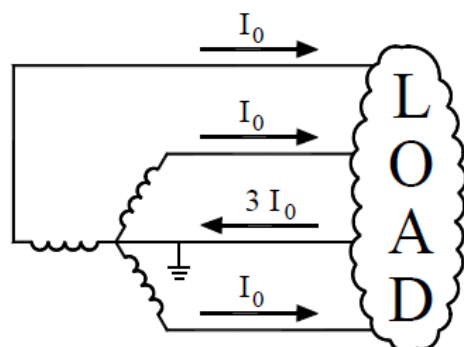
A Figura 27 mostra um total de  $3 I_0$  entregue da fonte para a carga. A única maneira que esta corrente pode fluir é se ela puder retornar para a fonte. A corrente de seqüência zero é fornecida à carga nos condutores de fase, mas não pode retornar à fonte nos condutores de fase.

Figura 27: Correntes de seqüência zero.



Um quarto condutor deve estar presente para servir de caminho de retorno. Este quarto condutor é o neutro. O neutro retorna a corrente de seqüência-zero fornecida por cada condutor de fase, ou  $3I_0$ . Se um quarto condutor (caminho de retorno) não existir, a corrente de seqüência-zero não fluirá. Este é sempre o caso com circuitos trifásicos.

Figura 28: Caminho de retorno para correntes de seqüência zero.

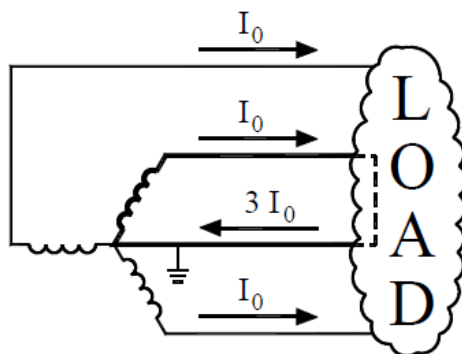


A Figura 28 mostra o percurso completo do circuito da corrente de seqüência-zero, sendo fornecida nos condutores de fase e sendo devolvida no neutro. Muitos engenheiros dizem que é necessária uma "conexão à terra" para que a corrente de seqüência-zero flua. Este não é realmente o caso, porque uma conexão a terra não é um requisito para que a corrente de seqüência-zero flua. Flui muito bem em um neutro não aterrado (isolado), mas é muito incomum não aterrar o neutro por razões de segurança. Nessa situação, os termos neutro e terra são muitas vezes (incorretamente) usados de forma intercambiável. Este documento fará a suposição de que o condutor neutro é sempre aterrado, mas se referirá ao condutor de retorno para corrente de seqüência-zero como o condutor neutro. Tenha em mente que com um ponto neutro aterrado de múltiplos pontos, como é comum em sistemas industriais, o condutor neutro está eletricamente em paralelo com a terra, de modo que a corrente de seqüência-zero é retornada pelo condutor neutro e pela terra.

O circuito representado na Figura 28 torna-se interessante ao tentar aplicar uma abordagem equivalente a uma única fase. O circuito "monofásico" é destacado na Figura 29 a seguir.



Figura 29: Circuito monofásico equivalente para correntes de sequência zero.



Observe que, como o condutor neutro retorna não apenas a corrente de sequência-zero da fase que estamos considerando como nosso equivalente de fase única, mas também a corrente de sequência-zero das outras duas fases. Isto causa um problema ao tentar analisar o equivalente de uma fase, uma vez que a corrente fornecida ( $I_0$ ) e a corrente retornada ( $3I_0$ ) são diferentes. Esse problema deve ser corrigido, e pode ser simplesmente com uma pequena álgebra. Para que o equivalente de fase única seja válido, a queda de tensão correta deve ser calculada para o caminho de retorno neutro. Se a reatância em série no caminho de retorno for  $X_N$ , a queda de tensão para o caminho de retorno neutro é encontrada usando a Lei de Ohm.

$$V_N = 3I_0 \times X_N \quad (74)$$

Forçando a corrente pelo neutro do circuito equivalente monofásico para igualar a corrente fornecida por uma única fase ( $I_0$ ), o coeficiente 3 deve ser removido da corrente  $I_0$ . Simplesmente descartar esse coeficiente alteraria a queda de tensão calculada para o caminho de retorno neutro, invalidando assim o circuito equivalente monofásico. Mas a queda de tensão calculada permanece correta se o coeficiente for simplesmente agrupado com o outro termo ( $X_N$ ). Isto é,

$$V_N = I_0 \times 3X_N \quad (75)$$

Esta mudança algébrica sutil tem uma interpretação física significativa. Qualquer impedância conectada entre o centro estrela de um sistema e a terra é submetida a três vezes a corrente de sequência-zero como está fluindo em cada um dos condutores de fase. Portanto, para fornecer a queda de tensão apropriada, qualquer impedância conectada entre o centro estrela do sistema e a terra deve ser triplicada quando se modela o circuito como redes de sequência. E como a corrente de sequência-zero é o único componente de corrente que pode fluir no neutro, esta condição se aplica somente à rede de sequência-zero.

### 4.3 Redes de sequência

Agora que a necessidade de modelar correntes desequilibradas como componentes simétricos é entendida, o conceito de redes de sequência deve ser introduzido. Quando uma corrente  $I$  flui através de uma impedância  $Z$  qualquer, a corrente deve ser interpretada como a soma de três componentes equilibradas. Assim, para a fase A tem-se,

$$I_A = I_0 + I_1 + I_2 \quad (76)$$

Cada componente de corrente pode experimentar um valor efetivo diferente de impedância. Este conceito bastante abstrato deve ser aceito, embora as razões subjacentes não sejam



facilmente compreendidas. Embora longe de uma analogia perfeita, pode-se considerar uma corrente contendo vários componentes harmônicos.

Cada componente harmônico “enxerga” um valor de resistência diferente ao fluir através de um fio. Isto é devido ao fato de que a resistência AC é uma função de frequência. As correntes de sequência  $I_0$ ,  $I_1$  e  $I_2$  estão todas na frequência fundamental do sistema, então a analogia não é perfeita, mas como as correntes harmônicas, as componentes simétricas podem experimentar um valor de impedância diferente em uma dada porção de um sistema. A lei de Ohm pode, portanto, ser declarada para cada componente da sequência como se segue:

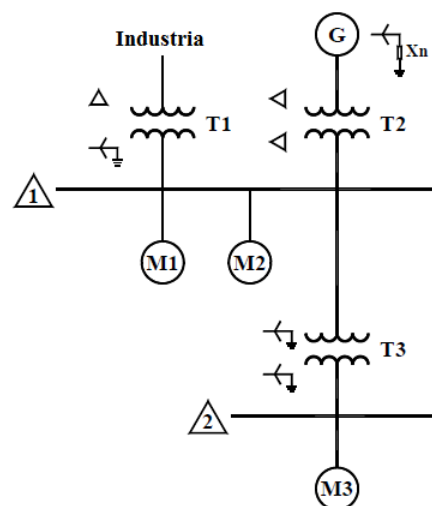
$$V_0 = I_0 \times Z_0 \quad (77a)$$

$$V_1 = I_1 \times Z_1 \quad (77b)$$

$$V_2 = I_2 \times Z_2 \quad (77c)$$

Como cada componente da corrente “enxerga” uma impedância potencialmente diferente, três redes de impedância diferentes devem ser desenvolvidas para qualquer sistema a ser analisado. Como a maioria dos estudos de sistemas desequilibrados envolvem cálculos de curto-circuito, é comum desprezar a parte resistiva da impedância, uma vez que seu efeito na magnitude da corrente de curto-circuito é muito pequeno. Por essa razão, vamos desenvolver uma rede de reatância positiva, negativa e de sequência-zero. Considere o diagrama unifilar mostrado na Figura 30.

Figura 30: Diagrama unifilar.



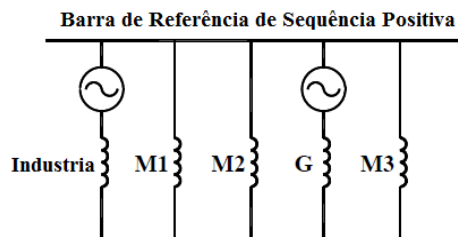
A rede de reatância de sequência positiva é desenvolvida diretamente a partir do diagrama unifilar do sistema. Primeiro, uma Barra de Referência de Sequência Positiva é desenhada. Por convenção, este barramento é desenhado na parte superior do diagrama (nem sempre essa barra de referência é utilizada, entretanto, o seu uso costuma facilitar o entendimento da montagem das redes de sequência). Depois que a Barra de Referência de Sequência Positiva é desenhada, todas as fontes e cargas capazes de armazenar energia (elementos ativos ou que tem a capacidade de alimentar curtos circuitos) no diagrama unifilar são conectadas a ele. Isso normalmente significa interconexões de sistemas de distribuição, geradores e motores.

As impedâncias da fonte são modeladas em série com uma fonte interna representando a tensão pré-falta nesse ponto no sistema. Uma vez que esta tensão geralmente não é conhecida a menos que um cálculo de fluxo de energia seja realizado, é muitas vezes



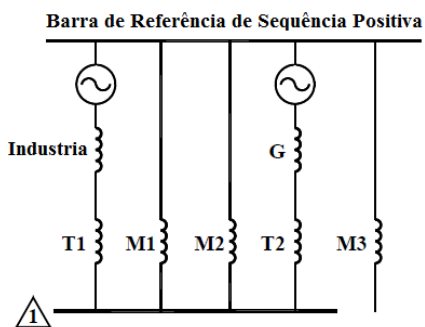
assumido como 1,0 pu, e é atribuído o ângulo de referência de zero graus. A primeira fase da construção da rede de sequência positiva é mostrada na Figura 31.

Figura 31: Primeiro estágio da determinação da rede de sequência positiva.



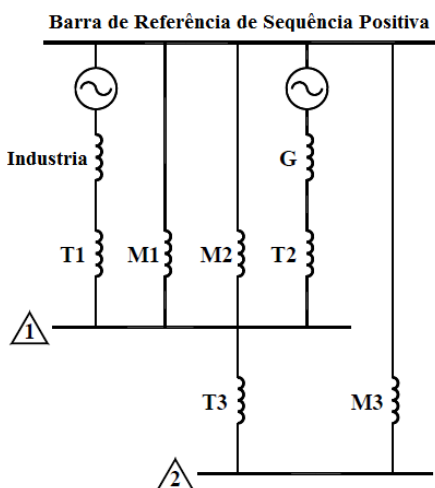
Em seguida, os outros componentes do diagrama unifilar são modelados como reatâncias. Transformadores T1 e T2 são desenhados, e a localização da barra 1 é estabelecida. Isto pode ser visto na figura abaixo.

Figura 32: Próxima Etapa do Desenvolvimento da Rede de Seqüência Positiva.



Finalmente, o transformador T3 e a localização do barramento 2 são estabelecidos, completando a rede de sequência-positiva como mostrado na figura abaixo.

Figura 33: Rede de sequência positiva.



Observe que cada valor numérico da reatância é a reatância de sequência-positiva para esse componente.





A rede de seqüências negativas pode ser desenvolvida diretamente a partir da rede de seqüência positiva. As três etapas seguintes, quando aplicadas à rede de seqüência-positiva, renderão a rede de seqüência-negativa:

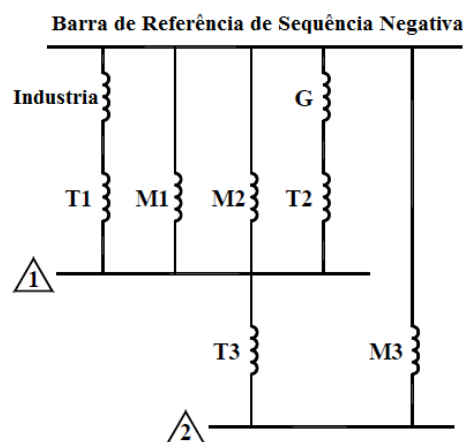
- a) Remova as fontes de tensão e curto-circuite seus terminais;
- b) Renomeie o barramento de referência como o "Barra de Referência de Seqüência Negativa";
- c) Mude os valores numéricos das reatâncias dos valores de seqüência-positiva para os valores de seqüência-negativa.

No sistema real, somente as tensões de seqüência-positiva são geradas. Portanto, todas as fontes de tensão aparecerão somente na rede de seqüência-positiva. Observe que as reatâncias por trás das tensões geradas ainda aparecem na rede de seqüência-negativa como reatâncias de seqüência-negativa.

A maioria dos componentes do sistema de potência são bilaterais, o que significa que seu comportamento quando a corrente flui através deles em uma direção é o mesmo que quando a direção do fluxo de corrente reverte. Máquinas rotativas são uma exceção. Devido à direção da rotação do rotor, o comportamento ao longo do entreferro varia com a direção do fluxo de corrente. Isto significa que, em geral, as máquinas rotativas terão valores de reatância de seqüência negativa diferentes dos valores de seqüência positiva. A diferença numérica aumenta à medida que a velocidade da máquina diminui e à medida que as faces dos polos se tornam mais salientes.

A rede de seqüência negativa para o diagrama unifilar considerado é mostrado na Figura 34.

**Figura 34: Rede de seqüência negativa.**



A rede de seqüência-zero pode ser desenvolvida a partir da rede de seqüência-negativa, mas as etapas de modificação são um pouco diferentes:

- a) Renomeie o barramento de referência como o "Barra de Referência de Seqüência-Zero";
- b) Altere os valores numéricos das reatâncias dos valores da seqüência-negativa para os valores da seqüência-zero;
- c) Adicione três vezes a impedância de aterramento ao valor de reatância numérica de qualquer máquina que esteja aterrada através de uma impedância;



- d) Ajuste a topologia da rede para forçar o comportamento correto de sequência-zero.

A quarta etapa é muito importante e será abordada em detalhes. Mas primeiro, alguns comentários sobre os passos 2 e 3. Os valores de reatância de sequência-negativa e zero são substancialmente diferentes para a maioria dos componentes. Uma exceção notável é o transformador de potência de dois enrolamentos, onde todas as três reatâncias de sequência são iguais à reatância de dispersão do transformador. As linhas de transmissão e distribuição têm reatâncias de sequência-zero que apresentam valores mais elevados do que suas reatâncias de sequência positiva e negativa. Isto é devido à impedância do caminho de retorno da corrente de terra, e é explicado pelas Equações de Carson. As máquinas rotativas, por outro lado, têm reatâncias de sequência-zero que são muito menores do que suas reatâncias de sequência positiva e negativa, devido à grande magnitude do fluxo de sequência-zero através do entreferro.

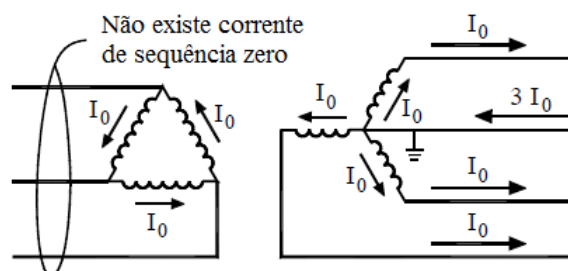
O passo três indica a necessidade de aumentar o valor da reatância numérica de qualquer máquina que esteja aterrada através de uma impedância por três vezes o valor da impedância de aterramento. A impedância de aterramento deve ser incluída na rede de sequência-zero e não está incluída nas outras duas redes de sequência, porque somente corrente de sequência-zero pode fluir para terra. As outras duas correntes de sequência só podem fluir nos condutores de fase. A razão para triplicar a impedância de aterramento é mostrada pela equação 16.

A quarta etapa é ajustar a topologia da rede de sequência-zero para forçar a corrente que flui nessa rede a se comportar como corrente de sequência-zero. A seção 2 deste documento explica que a sequência-zero só pode fluir nas partes de um circuito que tem um quarto condutor para servir como um caminho de retorno. Isto significa que onde existam conexões triângulo não aterradas e delta não haverá fluxo de corrente de sequência-zero. A topologia de rede deve ser alterada para refletir esse fato.

Estas alterações são melhor compreendidas por meio de um exemplo. Antes de tentar um exemplo, será útil analisar o comportamento da corrente de sequência-zero do transformador delta-estrela.

Comece a analisar o transformador delta-estrela mostrado na abaixo com o circuito Y. Para que a corrente de sequência-zero flua para a carga nos condutores de fase, a corrente de sequência-zero total fornecida ( $3I_0$ ) deve retornar no neutro.

Figura 35: Comportamento de um transformador delta-estrela para correntes de sequência zero.



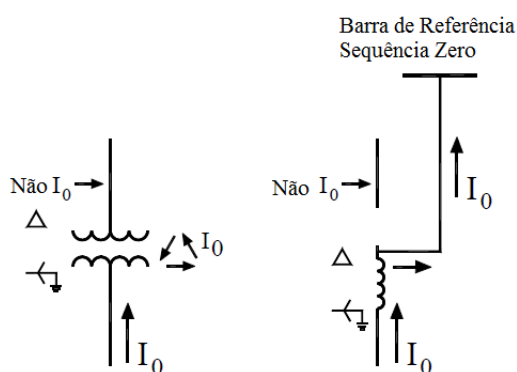
A corrente em pu de sequência-zero que flui em cada um dos enrolamentos do transformador conectado em estrela também deve fluir nos enrolamentos correspondentes conectados em delta. Escrever a equação do nó em cada terminal do delta torna aparente que nenhuma corrente de sequência zero pode fluir do delta para as linhas. A corrente de sequência-zero flui nos enrolamentos conectados em estrela, e circula nos enrolamentos conectados em delta.



Note que se a corrente circulante no delta estiver na forma de uma corrente de terceiro harmônico, o aumento de temperatura resultante devido à frequência mais alta (e efeito pelicular) pode ser problemático. As correntes do terceiro harmônico se comportam como correntes de sequência-zero.

No diagrama de reatância de sequência-zero, a corrente de sequência-zero deve ser impedida de sair do delta para as linhas do circuito de três fios. Isto é conseguido através da introdução de um circuito aberto no lado delta do transformador. Mas esse circuito aberto também evitaria que corrente de sequência-zero flua através da impedância do transformador (enrolamentos), e podemos ver na Figura 35 que isso está incorreto. Assim, um curto circuito de retorno ao barramento de referência permite que a corrente de sequência-zero flua do circuito em estrela, através da reatância do transformador e para o barramento de referência, enquanto o circuito aberto impede que a corrente de sequência-zero flua do transformador para O circuito delta. A Figura 36 mostra o modelo de circuito de sequência-zero para um transformador de estrela com aterramento delta.

Figura 36: Modelo de um transformador delta-estrela para sequência zero.



A Tabela 1 abaixo resume as regras de alteração das redes elétricas considerando componentes de sequência zero.

Tabela 1: Regras para as alterações da rede considerando componentes de sequência zero.

Conexão	Alteração
Y aterrado	Nenhuma
Y isolado	Circuito Aberto
Delta	Circuito aberto e curto-circuito para a barra de referência

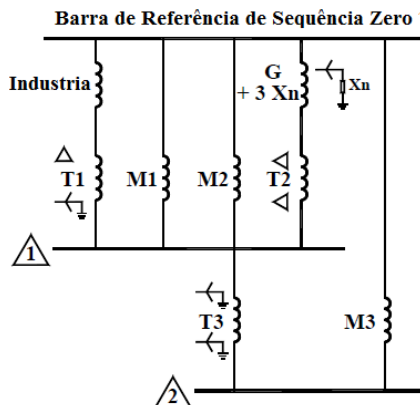
Usando as regras de alteração resumidas na Tabela 1, a topologia de cada reatância de máquina (transformador, gerador e motor) pode ser alterada para permitir um comportamento apropriado de sequência-zero. Observe que os tipos de conexão dos motores mostrados na Figura 30 não são especificados. Isto não é um problema, porque os motores são virtualmente conectados como uma conexão de três fios (delta ou Y aterrado ou isolado). De acordo com a tabela acima, ambas as ligações delta e estrela envolvem um circuito aberto, e este circuito aberto remove eficazmente o motor da rede de sequência-zero.

Assim, a representação de redes de sequência zero podem ter como ponto de partida a rede de sequência-negativa, renomeando o barramento de referência e mudando os valores



numéricos das reatâncias de sequência-negativa para os valores de sequência-zero. Em seguida, transfira os símbolos de fase (deltas, estrelas e estrelas aterradas) do diagrama unifilar para o diagrama de reatância de sequência-zero, como mostrado na Figura 37.

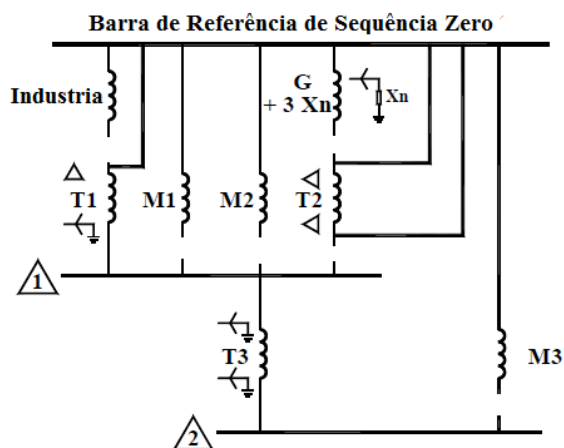
Figura 37: Primeiro passo do desenvolvimento da rede de reatância de sequência zero.



Neste ponto, qualquer dispositivo com impedância aterrada, tal como o gerador, deve ter sua reatância de sequência-zero computada como sendo vezes a impedância de aterramento. A Figura 37 mostra a impedância do gerador aumentada do seu valor original de G para  $G+3X_n$ .

Finalmente, as regras de alteração de topologia da Tabela 1 podem ser aplicadas. Qualquer circuito aterrado é deixado inalterado, uma vez que a corrente de sequência-zero pode fluir em um circuito de quatro fios. Os dispositivos Y não aterrados estão em circuito aberto, porque a falta de caminho de retorno evitará que a corrente de sequência-zero flua em um circuito de três fios. Os equipamentos conectados em delta são alterados para incluir tanto um circuito aberto (para evitar que a corrente de sequência-zero flua no circuito a três fios) quanto um curto-circuito para o barramento de referência (para simular o percurso de circulação fornecido pelos enrolamentos conectados em delta). A rede de sequência-zero resultante é mostrada na Figura 38.

Figura 38: Primeiro passo do desenvolvimento da rede de reatância de sequência zero.



O método de desenvolvimento da rede de sequência-zero modificando a topologia da rede de seqüências negativas, usando as regras resumidas na Tabela 1, é novo. A maioria dos textos sugere usar uma abordagem de bloco de construção, construindo a rede de



sequência-zero a partir do zero, montando os modelos de impedância de sequência-zero para cada componente do sistema. Os modelos de impedância de sequência-zero para muitos elementos comuns do sistema de potência são mostrados na Tabela 2 abaixo.

Tabela 2: Modelos para representar diversos elementos da rede elétrica considerando componentes de sequência zero.

<u>Componente</u>	<u>Símbolo Unifilar</u>	<u>Modelo de Impedância de Sequência Zero</u>
<u>Linha aérea ou cabo</u>		
<u>Transformadores de dois enrolamentos</u>		
<u>Transformador de aterramento</u>		
<u>Máquinas Rotativas</u>		



### Exemplo 1

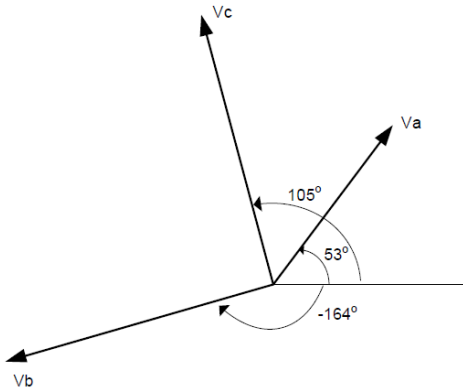
Dados os fasores abaixo, encontre suas respectivas componentes simétricas. O diagrama correspondente é apresentado na figura abaixo:

$$\dot{V}_a = 5 \angle 53^\circ$$

$$\dot{V}_b = 7 \angle -164^\circ$$

$$\dot{V}_c = 7 \angle 105^\circ$$

Figura 39: Diagrama dos fasores do exemplo 1.



### Solução

Sequência zero:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{a0} &= \frac{1}{3}(\dot{V}_a + \dot{V}_b + \dot{V}_c) \\ &= \frac{1}{3}(5 \angle 53^\circ + 7 \angle -164^\circ + 7 \angle 105^\circ) \\ &= 3,5 \angle 122^\circ\end{aligned}$$

Logo, pela propriedade de componentes de sequência zero e pela equação (7), tem-se:

$$\dot{V}_{a0} = \dot{V}_{b0} = \dot{V}_{c0} = 3,5 \angle 122^\circ$$

Sequência positiva:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{a1} &= \frac{1}{3}(\dot{V}_a + a\dot{V}_b + a^2\dot{V}_c) \\ &= \frac{1}{3}(5 \angle 53^\circ + (7 \angle -164^\circ \times 1 \angle 120^\circ) + (7 \angle 105^\circ \times 1 \angle -120^\circ)) \\ &= 5,0 \angle -10^\circ\end{aligned}$$

Logo, pela propriedade de componentes de sequência positiva e pela equação (5), tem-se:

$$\dot{V}_{b1} = 5,0 \angle -130^\circ$$

$$\dot{V}_{c1} = 5,0 \angle 110^\circ$$

As componentes de sequência negativa são resolvidas de modo análogo às componentes de sequência positiva, e conforme a equação (6):



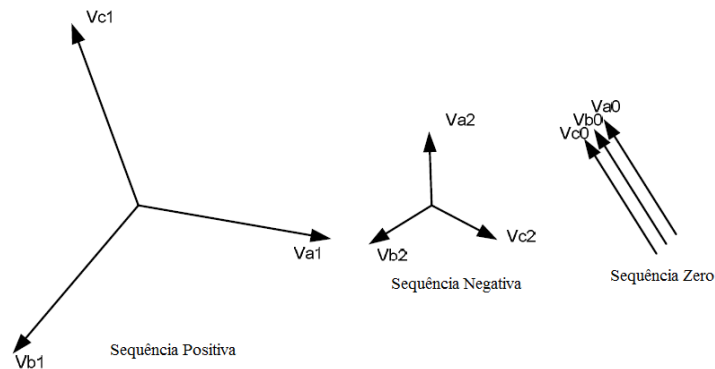
$$\begin{aligned}\dot{V}_{a2} &= \frac{1}{3}(\dot{V}_a + a^2\dot{V}_b + a\dot{V}_c) \\ &= \frac{1}{3}(5\angle 53^\circ + (7\angle -164^\circ \times 1\angle -120^\circ) + (7\angle 105^\circ \times 1\angle 120^\circ)) \\ &= 1,9\angle 92^\circ\end{aligned}$$

$$\dot{V}_{a2} = 1,9\angle -148^\circ$$

$$\dot{V}_{a2} = 1,9\angle -28^\circ$$

A Figura 40 apresenta os fasores do exemplo 1

Figura 40: Diagrama fasorial das componentes de seqüência calculadas para o exemplo 1.



## Exemplo 2

Dadas as componentes de seqüência abaixo, encontre as suas componentes de fase correspondentes:

$$\dot{V}_0 = 3,5\angle 122^\circ$$

$$\dot{V}_1 = 5,0\angle -10^\circ$$

$$\dot{V}_2 = 1,9\angle 92^\circ$$

### Solução

Fase A:

$$\begin{aligned}\dot{V}_a &= \dot{V}_0 + \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \\ &= 3,5\angle 122^\circ + 5,0\angle -10^\circ + 1,9\angle 92^\circ \\ &= 5,0\angle 53^\circ\end{aligned}$$

Fase B:

$$\begin{aligned}\dot{V}_b &= \dot{V}_0 + a^2\dot{V}_1 + a\dot{V}_2 \\ &= 3,5\angle 122^\circ + (5,0\angle -10^\circ \times 1,0\angle -120^\circ) + (1,9\angle 92^\circ \times 1,0\angle 120^\circ) \\ &= 7,0\angle -164^\circ\end{aligned}$$

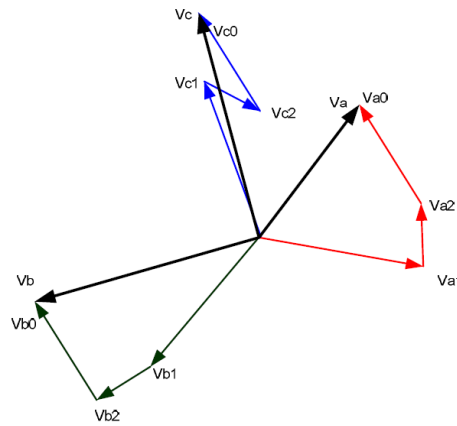
Fase C:



$$\begin{aligned} \dot{V}_c &= \dot{V}_0 + a\dot{V}_1 + a^2\dot{V}_2 \\ &= 3,5\angle 122^\circ + (5,0\angle -10^\circ \times 1,0\angle 120^\circ) + (1,9\angle 92^\circ \times 1,0\angle -120^\circ) \\ &= 7,0\angle 105^\circ \end{aligned}$$

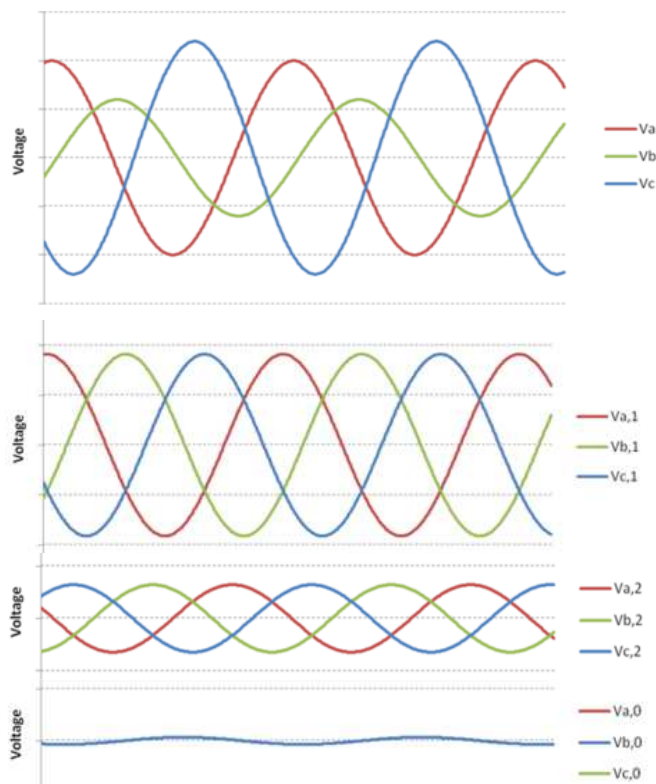
O diagrama de fasores no domínio das fases para o exemplo 2 está apresentado na Figura 41 abaixo.

Figura 41: Diagrama fasorial das componentes de fase calculadas para o exemplo 2.



Fisicamente as componentes de sequência representam sinais senoidais variando no tempo, dessa forma a figura abaixo apresenta a decomposição gráfica de um sinal senoidal desequilibrado em suas respectivas componentes de sequência.

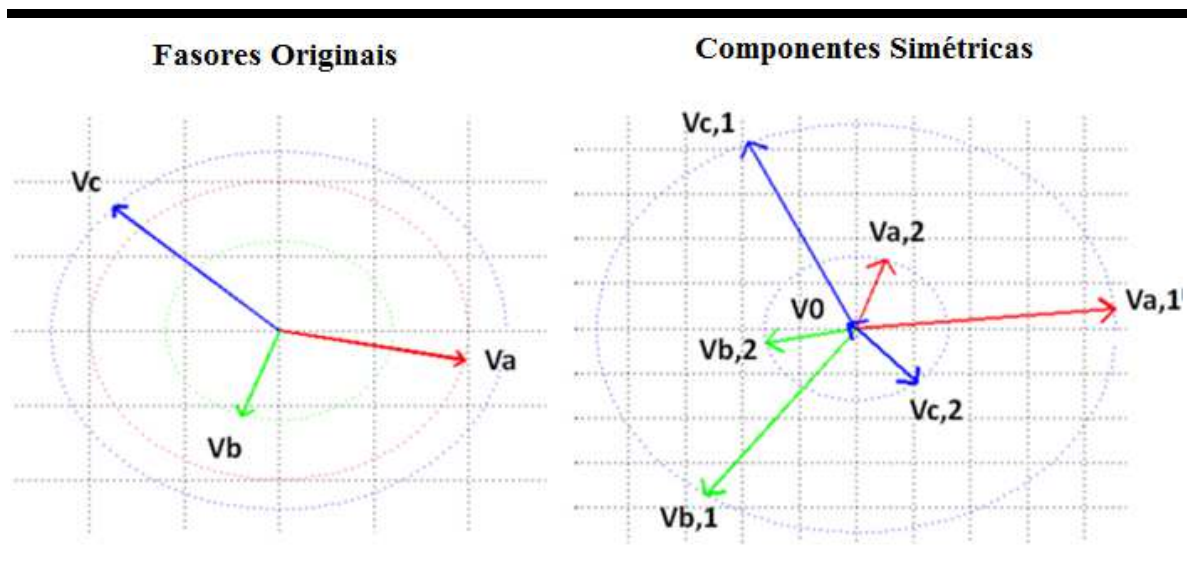
Figura 42: Fasores originais desequilibrados e suas componentes de sequência, positiva, negativa e zero, respectivamente.





A Figura 43 abaixo apresenta um diagrama fasorial contendo as componentes de fase do sinal original e suas respectivas componentes de seqüência.

Figura 43: Fasores originais e suas componentes de seqüência.



## 5 CURTOS-CIRCUITOS EM SISTEMAS DE POTÊNCIA

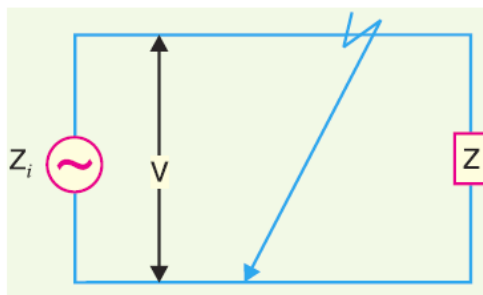
Sempre que falta ou falta ocorrer em uma rede elétrica, de modo que uma grande corrente flua em uma ou mais fases, é possível afirmar ter ocorrido um **curto-circuito**.

Quando ocorre um curto-circuito, uma corrente elevada chamada corrente de curto-circuito fluirá através do circuito. Uma situação de curto-circuito é ilustrada pela Figura 44, onde um gerador de tensão monofásico com impedância interna  $Z_i$  e amplitude  $V$  está alimentando uma carga  $Z$ .

Em condições normais, a corrente no circuito é limitada tanto pela impedância interna da rede quanto pela impedância de carga  $Z$ . No entanto, se os terminais de carga ficarem em curtos-circuitos por qualquer motivo, a impedância do circuito é reduzida para um valor muito baixo, ou seja,  $Z_i$ . Como  $Z_i$  é muito pequeno, portanto, uma grande corrente flui através do circuito. Isso é chamado de corrente de curto-circuito. Vale a pena para fazer uma distinção entre um **curto-circuito** e um **sobrecarga**.

Quando ocorre um curto-circuito, a tensão no ponto de falta é reduzida para zero e um fluxo de corrente de magnitude anormalmente elevada se estabelecerá através da rede até o ponto de falta. Por outro lado, uma sobrecarga significa que cargas maiores que os valores projetados estão sendo impostas no sistema. Sob tais condições, a tensão no ponto de sobrecarga pode ser baixa, mas não zero.

Figura 44: Ilustração de um curto-circuito em uma rede unifilar.



As condições de subtensão impostas pelas sobrecargas podem se estender por uma certa distância além do ponto de sobrecarga para o restante do sistema. As correntes no equipamento em sobrecarga são altas, mas são substancialmente inferiores às correntes observadas em condição de curto-circuito.

### 5.1.1 Causas de curto-circuito

Um curto-circuito no sistema de energia é o resultado de algum tipo de condição anormal no sistema. Pode ser causada devido a efeitos internos e/ou externos.

- I. **Os efeitos internos** são causados pela quebra de equipamentos ou linhas de transmissão, de deterioração de isolamento em um gerador, transformador etc. Esses problemas podem ser devidos ao envelhecimento de isolamento, design inadequado ou instalação inadequada;
- II. **Os efeitos externos** que causam curto-circuito incluem falha de isolamento devido a surtos atmosféricos, sobrecarga de equipamento causando aquecimento excessivo; dano mecânico por ação de vândalos, etc.



### 5.1.2 Efeitos do curto-circuito

Quando ocorre um curto-circuito, a corrente no sistema aumenta para um valor anormalmente alto enquanto a tensão do sistema diminui para um valor baixo.

- I. A elevada corrente devido ao curto-circuito causa aquecimento excessivo que pode resultar em incêndio ou explosão. Às vezes, o curto-circuito assume a forma de um arco e causa danos consideráveis ao sistema. Por exemplo, um arco em uma linha de transmissão que não seja extinto rapidamente poderá alterar as propriedades mecânicas nos condutores, podendo causar a ruptura dos mesmos, resultando em uma longa interrupção da linha;
- II. A baixa tensão criada pela falta (curto-circuito) tem um efeito muito prejudicial no serviço fornecido pelo sistema de energia. Se a tensão permanecer abaixo dos valores permitidos por até alguns segundos, os motores dos consumidores podem ser desligados e os geradores no sistema de energia podem ficar instáveis.

Devido aos efeitos dos curtos-circuitos no sistema elétrico conforme acima descritos, é desejável e necessário dotar o sistema de mecanismos que possam atuar no sentido de isolar a área defeituosa de forma a restaurar a tensão e a corrente aos seus valores normais o mais rápido possível.

### 5.2 Correntes de Curto-Circuito

A maioria ocorrências em sistemas elétricos de potência são provocados por curtos-circuitos ou são provocadas por eles, causando fluxos de correntes intensas no sistema. Os cálculos dessas correntes de curto-circuito são importantes pelas seguintes razões:

- I. Um curto-circuito no sistema de energia é apagado por um disjuntor ou fusível. É necessário, portanto, conhecer os valores máximos possíveis de corrente de curto-circuito, de modo que o painel de ajuste adequado possa ser instalado para interrompê-los;
- II. A magnitude da corrente de curto-circuito determina a configuração e às vezes os tipos e a localização do sistema de proteção;
- III. A magnitude da corrente de curto-circuito determina o tamanho dos reatores limitadores de curto-circuito que devem ser inseridos no sistema para que o disjuntor possa suportar a corrente de falta;
- IV. O cálculo das correntes de curto-circuito nos permite fazer a seleção apropriada do aparelho associado (por exemplo, barramentos, transformadores de corrente, etc.) para que possam suportar as forças que surgem devido à ocorrência de curtos-circuitos.

### 5.3 Curtos-Circuitos em Sistemas de Potência

Uma falta ocorre quando dois ou mais condutores que normalmente operam com uma diferença de potencial entrem em contato uns com os outros. Essas faltas podem ser causadas por falhas súbitas de um equipamento, danos acidentais ou curto-circuito em linhas aéreas ou por faltas de isolamento resultantes de surtos atmosféricos. Independentemente das causas, as faltas em um sistema trifásico podem ser classificadas em duas categorias principais, a saber.

(I) faltas simétricas (II) faltas assimétricas



- I. **Faltas simétricas.** Essa falta que dá origem a correntes de falta simétricas (isto é, correntes de faltas iguais com defasagem de  $120^\circ$  elétricos). Nesta condição falta é chamada de falta simétrica. O exemplo mais comum de falta simétrica é quando todos os três condutores de uma linha trifásica são reunidos simultaneamente em uma condição de curto-circuito;
- II. **Faltas não simétricas.** Essas faltas que dão origem a correntes não simétricas (ou seja, correntes de linha desiguais com deslocamento desigual) são chamadas de faltas assimétricas, ou curtos-circuitos assimétricos, ou desequilibrados. As faltas assimétricas podem assumir uma das seguintes formas:
  - a) Falta monofásica ou fase-terra;
  - b) Falta bifásica ou fase-fase;
  - c) Falta bifásica-terra ou fase-fase-terra

A grande maioria das faltas no sistema elétricos são de natureza assimétrica; o tipo mais comum é um curto-circuito monofásico. Os cálculos de tais correntes de falha são feitos pelo método das "componentes simétricas".

## 5.4 Cálculo de Curtos-Circuitos Simétricos

A maioria das falhas no sistema elétrico levam a uma condição de curto-circuito. Quando tal condição ocorre, conforme acima mencionado, se estabelece uma corrente de valor muito elevado que flui através da rede elétrica e dos equipamentos, podendo causar danos consideráveis ao equipamento e interrupção do serviço aos consumidores.

### 5.4.1 Faltas simétricas em circuitos trifásicos

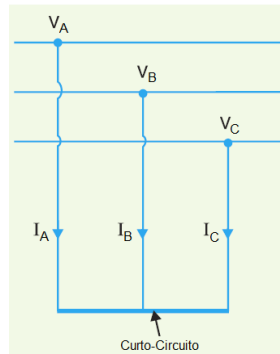
Este tipo de falta no sistema elétrico dá origem a correntes de falta simétricas (ou seja, correntes de curto-circuito iguais nas três fases, com defasamento angular de  $120^\circ$  elétricos).

A falta simétrica ocorre quando todos os três condutores de uma linha trifásica são reunidos simultaneamente em uma condição de curto-circuito como mostrado na Figura 45. Assim, referindo-se à referida figura, as correntes de falta  $I_A$ ,  $I_B$  e  $I_C$  serão iguais em magnitude com  $120^\circ$  de defasamento angular entre elas. Devido à natureza equilibrada da falta, apenas uma fase poderá ser considerada nos cálculos (*representação unifilar*), uma vez que a condição nas outras duas fases também será semelhante. Os seguintes pontos podem ser particularmente notados:

- I. A falta simétrica raramente ocorre na prática. No entanto, cálculos simétricos de faltas serão discutidos neste capítulo para permitir que o leitor compreenda os problemas que as condições de curto-circuito apresentam no sistema de energia;
- II. A falta simétrica é a mais grave dentre os tipos de faltas que podem ocorrer em um sistema elétrico (veremos que nem sempre!) e podem impor condições severas tanto para o sistema quanto para os disjuntores que serão solicitados a interromper tais correntes de curto-circuito.



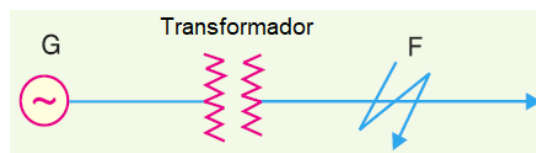
Figura 45: Ilustração de um curto-circuito trifásico.



### 5.4.2 Limitadores de curtos-circuitos

Quando ocorre um curto-circuito em qualquer ponto de um sistema, a corrente de curto-circuito é limitada pela impedância do sistema até o ponto de falha. Assim, referindo-se à Figura 46, se ocorrer uma falha no alimentador no ponto F, a corrente de curto-circuito da central geradora terá um valor limitado pela impedância do gerador e transformador e a impedância da linha entre o gerador e o ponto de culpa. Isso mostra que o conhecimento das impedâncias de vários equipamentos e circuitos na linha do sistema é muito importante para a determinação de correntes de curto-circuito.

Figura 46: Ilustração de um curto-circuito em uma rede unifilar, no ponto F.



Em muitas situações, as impedâncias que limitam a corrente de falha são em grande parte reativas, como transformadores, reatores e geradores. Cabos e linhas são principalmente resistivos, mas onde a reatância total nos cálculos excede 3 vezes (ou mais) a resistência, o último geralmente é negligenciado. O erro introduzido por este pressuposto geralmente não excede 5%.

### 5.4.3 Reatância percentual

A reatância de geradores, transformadores, reatores etc. geralmente é expressa em porcentagem de reatância (ou em p.u.) para permitir cálculos de correntes de curto-circuito de forma mais rápida. A porcentagem de reatância de um circuito é definida como abaixo:

*É a porcentagem da queda de tensão de fase total no circuito quando a corrente de carga nominal está fluindo, isto é:*

$$\% X = \frac{XI}{V} \times 100 \quad (78)$$

Onde: X – reatância em ohms, por fase;

V – Tensão de fase;

I – Corrente nominal ou de plena carga



De forma alternativa, a reatância percentual (%X) poderá também ser expressa em termos de MVA e kV, como abaixo:

$$\% X = \frac{MVA}{(kV)^2} \times X \quad (79)$$

Onde X é a reatância em ohms.

Se X for simplesmente a parte reativa de um circuito, então a corrente de curto-circuito será dada por:

$$\begin{aligned} I_{cc} &= \frac{V}{X} \\ &= I \times \left( \frac{100}{\% X} \right) \end{aligned} \quad (80)$$

Isto é, a corrente de curto-circuito é obtida pelo produto da corrente à plena carga por 100/%X.

Por exemplo, se a reatância percentual de um elemento for 20% e a corrente de carga total for 50 A, a corrente de curto-circuito será de  $50 \times 100/20 = 250$  A.

Pode valer a pena mencionar aqui a vantagem de usar a reatância percentual (ou p.u.) em vez da reatância ôhmica em cálculos de curto-circuito. Os valores de reatância percentual permanecem inalterados à medida que são encaminhados através de transformadores, ao contrário das reatâncias ôhmicas que se multiplicam ou dividem pelo quadrado da relação de transformação. Isso torna o procedimento simples e permite cálculos rápidos.

#### 5.4.4 Reatância percentual e base de potência

A partir da Eq. 1 acima fica claro verificar que a reatância percentual de um equipamento depende da sua potência nominal em kVA (ou MVA). Geralmente, os vários equipamentos utilizados no sistema elétrico possuem potências nominais diferentes.

Portanto, é necessário encontrar as reatâncias percentuais de todos os elementos em uma potência em comum em kVA (ou MVA). Esta potência comum de kVA (ou MVA) é conhecida como **potência base kVA**. O valor a ser utilizado como base de potência não tem tanta importância, uma vez que o que é realmente importante é que todas as reatâncias percentuais (ou em p.u.) estejam referidas a esta base de potência. Assim, a potência base poderá ser:

- I. Igual a potência do equipamento de maior potência na instalação;
- II. Igual a potência total da instalação;
- III. A potência mais frequente entre os equipamentos da instalação;
- IV. Qualquer valor.

Sendo a potência nominal de um equipamento qualquer diferente da potência base adotada, uma conversão de base deverá ser realizada. Neste caso, a reatância percentual poderá ser referida à nova base de potência pela equação a seguir:

$$X \%_{(Nova)} = \frac{Base_{(Antiga)}}{Base_{(Nova)}} \times X \%_{(Antiga)} \quad (81)$$

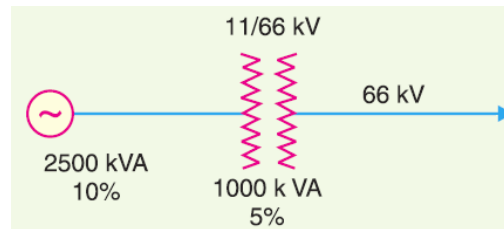
Assim, um transformador com potência nominal de 1MVA e reatância de dispersão de 5% terá uma reatância de 10% na base 2MVA.



### Exemplo 1

O fato de o valor da potência base não afetar o valor da corrente de curto-circuito precisa de uma ilustração. Considere uma linha de transmissão trifásica operando em 66 kV e conectada através de um transformador de 1000 kVA com reatância de 5% para um barramento de uma estação geradora. O gerador é de 2500 kVA com reatância de 10%. O diagrama unifilar do sistema é apresentado na Figura 47.

Figura 47: Diagrama unifilar para o exemplo 1.



Suponha que uma falta envolvendo as três fases ocorra nos terminais de alta tensão do transformador. Será mostrado que, independentemente do valor de potência base que possamos escolher, o valor da corrente de curto-circuito será o mesmo.

- I. Vamos supor que a potência seja 2500 kVA. Nesta base, as reatâncias dos elementos da rede serão:

Reatância do transformador na base 2500 kVA =  $5 \times 2500/1000 = 12,5\%$ ;

Reatância do gerador na base 2500 kVA =  $10 \times 2500/2500 = 10\%$ ;

Reatância percentual total na base comum (2500 kVA) =  $12,5 + 10 = 22,5\%$

A corrente base, considerando a potência base igual a 2500 kVA no lado de 66 kV será:

$$I_{Base} = \frac{2500 \times 1000}{\sqrt{3} \times 66 \times 1000} = 21,87 A$$

Logo a corrente de curto-circuito será:  $I_{CC} = I \times \frac{100}{\% X} = 21,87 \times \frac{100}{22,5} = 97,2 A$

De uma forma mais clara, a corrente de curto-circuito simétrica será, em percentual ou em p.u. numericamente igual ao inverso da impedância de curto-circuito (impedância de Thevenin no ponto da falta, como pode ser verificado acima.

- II. Agora, suponha que a base de potência considerada agora seja 5000 kVA:

Reatância do transformador na base 5000 kVA =  $5 \times 5000/1000 = 25\%$ ;

Reatância do gerador na base 5000 kVA =  $10 \times 5000/2500 = 20\%$ ;

Reatância percentual total na base comum (5000 kVA) =  $25 + 20 = 45\%$

A corrente base, considerando a potência base igual a 5000 kVA no lado de 66 kV será:

$$I_{Base} = \frac{5000 \times 1000}{\sqrt{3} \times 66 \times 1000} = 43,74 A$$

Observa-se que o valor da corrente de curto-circuito apresenta o mesmo valor que no caso anterior.



A partir do exemplo 1 acima, é claro que qualquer que seja o valor da base kVA, a corrente de curto-circuito é a mesma. No entanto, no interesse da simplicidade, um valor numericamente conveniente para a potência base deve ser escolhido.

#### 5.4.5 Nível de Curto-Circuito

Embora a diferença de potencial no ponto de falta seja zero, é uma prática normal expressar a corrente de curto-circuito em termos de kVA de curto-circuito com base na tensão normal do sistema no ponto de falta. *O produto da tensão normal do sistema e da corrente de curto-circuito no ponto de falta expresso em kVA é conhecido como Nível de Curto-Circuito.*

Façamos:

V = Tensão de fase nominal;

I = Corrente base;

%X = Reatância percentual do sistema na base adotada

Lembrando que a corrente de curto-circuito é dada por  $I_{CC} = I \times \left( \frac{100}{\% X} \right)$ , teremos que o nível de curto-circuito no ponto da falta será:

$$\begin{aligned} S_{CC} &= \frac{3VI_{CC}}{1000} \\ S_{CC} &= \frac{3VI}{1000} \times \left( \frac{100}{\% X} \right) \\ S_{CC} &= S_{base} [kVA] \times \left( \frac{100}{\% X} \right) \quad (82) \end{aligned}$$

#### 5.4.6 Reatores limitadores de correntes de curto-circuito

Com o sistema elétrico em expansão rápida, o nível de curto-circuito (ou seja, a energia disponível para fluir para uma falha) também está aumentando. Os disjuntores conectados no sistema elétrico de potência devem ser capazes interromper correntes de curto-circuito possíveis de surgirem em seus pontos de conexão. Geralmente, a reatância do sistema em condições de falta é baixa e as correntes de falta podem subir para um valor perigosamente alto. Se não forem tomadas medidas para limitar o valor dessas correntes de curto-circuito, não somente os impactos nos disjuntores serão excessivamente pesados, mas também danos nas linhas e outros equipamentos quase certamente ocorrerão.

Para limitar as correntes de curto-circuito a um valor que os disjuntores possam interromper, as reatâncias adicionais conhecidas como *reatores* são conectadas em série com o sistema em pontos adequados. Um reator é uma bobina com um certo número de espiras projetadas para ter uma grande indutância em comparação com sua resistência ôhmica. As forças nos enrolamentos desses reatores em condições de curto-circuito são consideráveis e, portanto, os enrolamentos devem ser solidamente reforçados. Devido a seu pequeno valor, a resistência ôhmica dos reatores exercem pouca influência na eficiência do sistema.





## Vantagens

- I. Os reatores limitam o fluxo de corrente de curto-circuito e, portanto, protegem os equipamentos de superaquecimentos, bem como de falhas devido a esforços mecânicos destrutivos;
- II. Os problemas são localizados ou isolados no ponto em que eles se originam sem comunicar seus efeitos perturbadores a outras partes do sistema de energia. Isso aumenta as chances de continuidade do suprimento;
- III. Permite a instalação de disjuntores de valores nominais mais baixos (menor custo!!!).

## Onde instalar os reatores limitadores de correntes de curto-circuito?

Os reatores limitadores de correntes de curto-circuito podem ser conectados conforme a seguir:

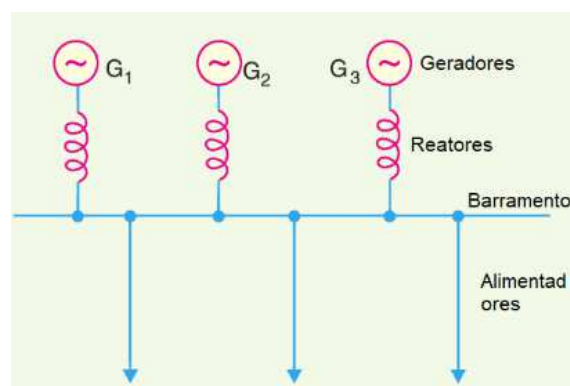
- I. **Em série com cada gerador;**
- II. **Em série com cada alimentador;**
- III. **Nos barramentos das instalações.**

Nenhuma afirmação definitiva pode ser dada acerca de qual local é preferível a instalação de um reator limitador. Cada instalação tem suas próprias demandas particulares, que devem ser cuidadosamente consideradas antes que uma escolha da localização do reator possa ser feita.

### I. Reatores limitadores em geradores

Quando os reatores são conectados em série com cada gerador, eles são conhecidos como reatores de gerador (Figura 48). Neste caso, o reator pode ser considerado como parte da reatância de dispersão do gerador, portanto, seu efeito é proteger o gerador no caso de qualquer curto-circuito além dos reatores.

Figura 48: Instalação de reatores limitadores em geradores.



## Desvantagens

- I. Existe queda de tensão e perda de energia nos reatores mesmo durante o funcionamento em regime normal;
- II. Se uma falta no barramento ou no alimentador perto da barra ocorrer, a tensão na barra será reduzida a um valor baixo, fazendo com que os geradores percam o sincronismo;
- III. Se ocorrer uma falta em qualquer alimentador, a continuidade do fornecimento para os outros provavelmente será afetada.

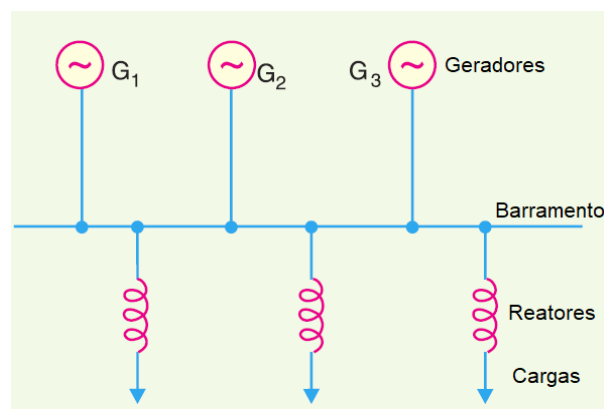
Devido a estas desvantagens e também uma vez que os modernos geradores de energia têm uma reatância de dispersão suficientemente grande para protegê-los contra curto-circuito, não é uma prática comum usar reatores separados para os geradores.

## II. Reatores limitadores em alimentadores

Quando os reatores são conectados em série com cada alimentador, eles são conhecidos como reatores de alimentadores (Figura 49). Como a maioria dos curtos-circuitos ocorrem nos alimentadores, um grande número de reatores é usado para esses circuitos. São duas as principais vantagens principais para reatores limitadores instalados em alimentadores.

Em primeiro lugar, se ocorrer uma falta em qualquer alimentador, a queda de tensão em seu reator não afetará a tensão no barramento de modo a haver pouca tendência de o gerador perder o sincronismo. Em segundo lugar, a falta no alimentador não afetará outros alimentadores e, conseqüentemente, os efeitos da falta estão localizados.

Figura 49: Instalação de reatores limitadores em alimentadores.



## Desvantagens

- I. Existe queda de tensão e perda de energia nos reatores mesmo durante o funcionamento em regime normal;
- II. Se ocorrer um curto-circuito na barra, nenhuma proteção é fornecida aos geradores. No entanto, isso é de pouca importância porque tais falhas são raras e os geradores modernos têm uma reatância de dispersão considerável para permitir resistir a curto-circuito em seus terminais;
- III. Se o número de geradores for aumentado, o tamanho dos reatores de alimentação terá que ser aumentado para manter as correntes de curto-circuito dentro da especificação dos disjuntores do alimentador.



### III. Reatores limitadores em barramentos

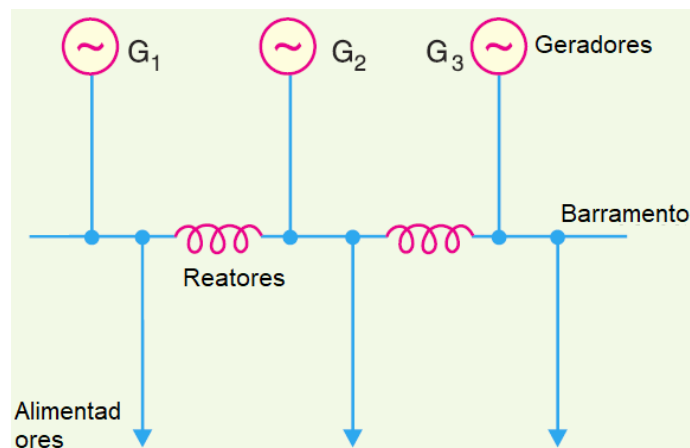
Os dois métodos acima para a localização de reatores limitadores sofrem da desvantagem de que há queda de tensão considerável e perda de energia nos reatores mesmo durante o funcionamento normal. Esta desvantagem pode ser superada localizando os reatores nas barras. Existem dois métodos para esse propósito, a saber; **Sistema de anel** e sistema **Interligação de barras**.

- **Sistema em anel:**

Neste sistema, o barramento é dividido em seções e estas seções estão conectadas através de reatores como mostrado na Figura 50 **Erro! Fonte de referência não encontrada.** Geralmente, um alimentador é alimentado apenas a partir de um gerador. Em condições normais de operação, cada gerador fornecerá sua própria seção da carga e muito pouca energia será alimentada por outros geradores. Isso resulta em baixa perda de energia e queda de tensão nos reatores.

No entanto, a principal vantagem do sistema é que, se ocorrer uma falta em qualquer alimentador, apenas um gerador (ao qual o alimentador particular está conectado) alimenta principalmente a corrente de falta enquanto a corrente alimentada de outros geradores é pequena devido à presença de reatores. Portanto, apenas essa seção da barra é afetada, a qual o alimentador está conectado, podendo as outras seções continuarem em operação normal.

Figura 50: Instalação de reatores limitadores em barramentos.

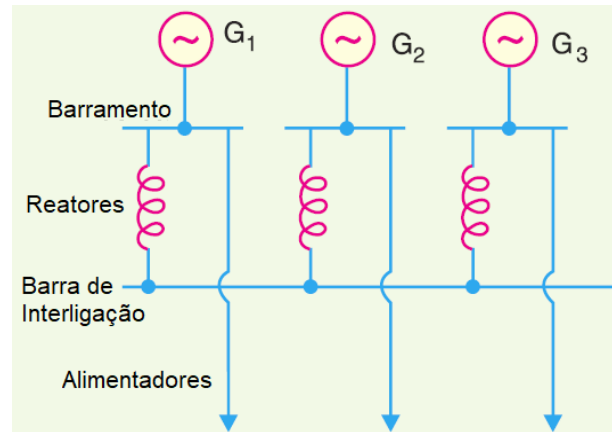


- **Interligação de barras:**

A Figura 51 mostra o sistema de interligação de barras. Comparando o sistema em anel com o sistema de interligação de barras, é claro que, no sistema de interligação de barras, existem efetivamente dois reatores em série entre as seções, de modo que os reatores devem ter aproximadamente metade da reatância daqueles usados em um sistema de anel comparável. Outra vantagem do sistema de interligação de barras é que geradores adicionais podem estar conectados ao sistema sem exigir mudanças nos reatores existentes. No entanto, este sistema tem a desvantagem de que requer um barramento adicional, isto é, a barra de ligação.



Figura 51: Instalação de reatores limitadores interligando barras.



## 5.5 Passos para o cálculo de faltas simétricas

Já foi discutido que as faltas trifásicas resultam em correntes de falta simétricas, ou seja, as correntes de falta nas três fases são de magnitude igual, mas são deslocadas de 120 ° elétricos uma da outra. Portanto, os problemas envolvendo tais falhas podem ser resolvidos considerando uma fase apenas as componentes de sequência positiva. O procedimento para a solução de tais falhas envolve as seguintes etapas:

- I. Desenhe um diagrama unifilar da rede completa indicando a potência, a tensão e a reatância percentual de cada elemento da rede;
- II. Escolha um valor numericamente conveniente para a base de potência e converta todas as reatâncias percentuais para este valor de base;
- III. A partir do diagrama unifilar da rede, desenhe o diagrama de impedâncias mostrando uma fase do sistema e o neutro. O transformador no sistema deve ser representado por uma reatância em série, sendo esta a sua reatância de dispersão;
- IV. Encontre impedância equivalente do sistema no ponto da falta ( $Z$  Thevenin), o qual será  $X\%$ ;
- V. Encontre a corrente base do sistema, em referência à potência base estipulada e a tensão nominal do sistema no ponto de falha ( $I_n$ );
- VI. Assim, temos que:

$$I_{CC} = I \times \frac{100}{\% X}$$

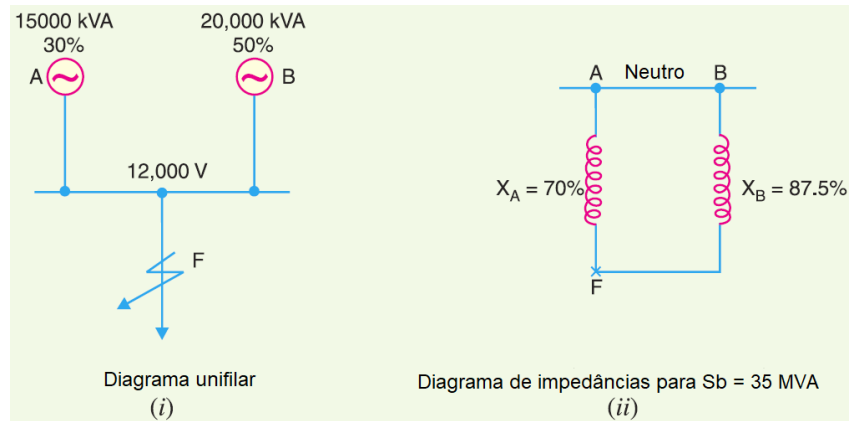
$$S_{CC} = S_{base} [kVA] \times \left( \frac{100}{\% X} \right)$$

### Exemplo 2

A Figura 52(i) mostra o diagrama unifilar de um sistema trifásico. A reatância percentual de cada gerador é baseada em sua própria potência nominal. Encontre a corrente de curto-circuito que se estabelecerá quando da ocorrência de um curto-circuito trifásico no ponto F.



Figura 52: Sistema elétrico para o exemplo 3.



### Resposta

$$S_{\text{base}} = 35 \text{ MVA}$$

$$\text{Reatância percentual do gerador A: } \% X_A = \frac{35,000}{15,000} \times 30 = 70\%$$

$$\text{Reatância percentual do gerador B: } \% X_B = \frac{35,000}{20,000} \times 50 = 87,5\%$$

$$\text{Corrente base para as bases de potência e tensão estabelecidas: } I_B = \frac{35 \times 10^6}{\sqrt{3} \times 12 \times 10^3} = 1684$$

A reatância total no ponto do curto-circuito será dada pelo equivalente das reatâncias entre os geradores e o ponto de falta. Neste caso, temos:  $\% X = X_A // X_B = 38,89\%$ ; Logo, a corrente de curto-circuito será:  $I_{CC} = 1684 \times 100 / 38,89 = 4330 \text{ [A]}$

### Exemplo 3

Um gerador trifásico, 20 MVA, 10 kV tem reatância interna de 5% e resistência desprezível. Encontre a reatância externa por fase para ser conectada em série com o gerador de modo que a corrente simétrica de curto-circuito não exceda 8 vezes a corrente nominal do gerador.

### Resposta

$$S_{\text{base}} = 20 \text{ MVA}$$

$$\text{Corrente nominal} = I_N = \frac{20 \times 10^6}{\sqrt{3} \times 10 \times 10^3} = 1154,7 \text{ [A]}$$

Como a corrente de curto-circuito simétrica deverá ser limitada em 8 vezes o valor da corrente nominal do gerador, podemos determinar a reatância percentual total como:

$$X(\%)_{\text{Total}} = \frac{\text{Corrente nominal}}{\text{Corrente de curto - circuito}} \times 100 = \left(\frac{1}{8}\right) \times 100 = 12,5\%$$

Considerando que a reatância total do sistema será a soma da reatância interna da máquina com a reatância externa, teremos que a reatância externa será dada por:  $12,5\% - 5\% = 7,5\%$ .



Estando as bases de tensão e potência estabelecidas, podemos encontrar o valor da reatância externa em ohms, multiplicando a reatância percentual pela impedância base. Neste caso temos:

$$X(\Omega) = X(\%) \times Z_{base} = \frac{7,5}{100} \times \frac{(10 \times 10^3)^2}{20 \times 10^6} = 0,375[\Omega]$$

#### Exemplo 4

A potência instalada de uma usina trifásica consiste em dois geradores de 10,000 kVA de reatância 12% cada e um gerador de reatância de 5000 kVA com reatância 18%. Os geradores estão conectados ao barramento da estação a partir das quais a carga é suprida através de três transformadores elevadores de 5000 kVA com uma reatância de 5%.

Determine o nível de curto-circuito máximo que os disjuntores em (i) lado de baixa tensão e (ii) lado de alta tensão podem ter que lidar.

Resposta

As reatâncias percentuais dos geradores A, B e C e dos transformadores são apresentados abaixo:

$$X_A(\%) = 12 \times 10,000/10,000 = 12 \%$$

$$X_B(\%) = 12 \times 10,000/10,000 = 12 \%$$

$$X_C(\%) = 18 \times 10,000/5,000 = 36 \%$$

$$X_T(\%) = 5 \times 10,000/5,000 = 10 \%$$

Quando ocorre a falha no lado de baixa tensão do transformador (ponto  $F_1$  na Figura 53), o diagrama de impedância será como mostrado na Figura 54 a). Obviamente, a reatância total até o ponto de falta  $F_1$  é a combinação paralela das reatâncias dos três alternadores, isto é,  $X(\%)$  dos geradores para a falta no ponto  $F_1$  na baixa dos transformadores =  $X_A(\%)/X_B(\%)/X_C(\%) = 5,14\%$ , o que dará um nível de curto-circuito trifásico de:

$$S_{CC} = \frac{1}{5,14/100} \times 10 \times 10^3 = 194[MVA]$$

Figura 53: Sistema elétrico para o exemplo 4.

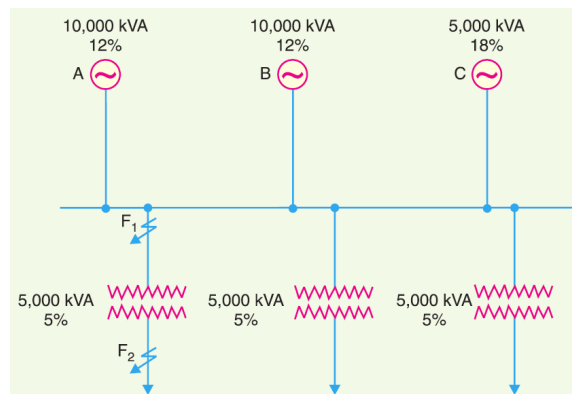
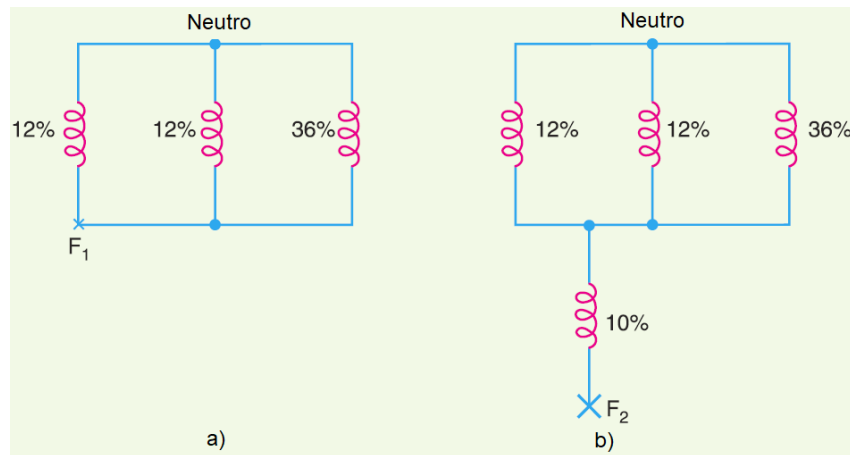


Figura 54: Diagrama de impedâncias para o exemplo 4: a) Curto-circuito na barra; b) Curto-circuito no lado de alta tensão do transformador.



Quando ocorre a falha no lado de alta tensão do transformador (ponto  $F_2$  na Figura 53), o diagrama de impedância será como mostrado na Figura 54 b). A reatância total até o ponto de falta  $F_2$  será a soma do paralelo das impedâncias dos três geradores mais a impedância do transformador envolvido na falta =  $(X_A(\%)/X_B(\%)/X_C(\%)) + 10\% = 5,14 + 10 = 15,14\%$ . Assim, o nível de curto-circuito para este ponto será:

$$S_{CC} = \frac{1}{15,14/100} \times 10 \times 10^3 = 66 [MVA]$$

Pode notar-se que serão necessários disjuntores de capacidades mais baixas no lado de alta tensão dos transformadores.



## 6 Curtos-Circuitos Assimétricos

Embora as faltas simétricas sejam as mais severas e imponham esforços severos aos disjuntores, a análise dessas faltas pode ser feita com um bom grau de facilidade, isto devido à natureza equilibrada da falta, que permite considerar apenas uma fase nos cálculos, uma vez que as condições nas outras duas fases são semelhantes, logo, um sistema trifásico sob falta trifásica poderá ser representado apenas pela sua malha de sequência positiva, e por diagrama unifilar.

A grande maioria das faltas no sistema elétrico são de natureza assimétrica, o tipo mais comum é um curto-circuito entre uma fase e a terra. Quando ocorre tal falta, dá origem a correntes não simétricas, isto é, a magnitude das correntes de falta nas três linhas são diferentes, tendo deslocamento de fase desigual. O procedimento de cálculo conhecido como *método de componentes simétricas* é usado para determinar as correntes e tensões na ocorrência de uma falha não simétrica. Neste contexto, atenção será dada para a análise de faltas não simétricas

### 6.1 Faltas assimétricas em sistemas trifásicos

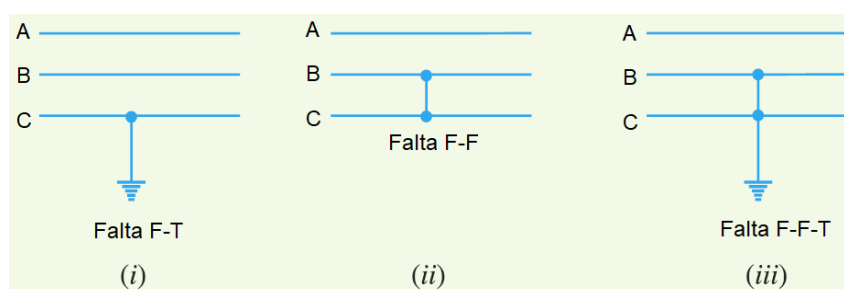
Essas faltas nos sistemas de potência que dão origem a correntes de falta não simétricas (ou seja, correntes de falta desiguais nas linhas com deslocamento de fase desigual) são conhecidas como faltas assimétricas.

Na ocorrência de uma falta assimétrica, as correntes nas três linhas tornam-se desiguais e também o deslocamento de fase entre elas. Pode notar-se que o termo "assimetria" aplica-se apenas à própria falta e às correntes de linha resultantes. No entanto, as impedâncias do sistema e as tensões da fonte são sempre simétricas através dos seus elementos principais tais como geradores, linhas de transmissão, compensadores síncronos, etc. Existem três maneiras pelas quais faltas assimétricas podem ocorrer em um sistema elétrico de potência.

- I. **Falta monofásica ou fase-terra (F-T);**
- II. **Falta bifásica ou fase-fase (F-F);**
- III. **Falta bifásica-terra ou fase-fase-terra (F-F-T).**

A Figura 55 apresenta os três tipos possíveis de faltas assimétricas que podem acometer um sistema elétricos de potência.

Figura 55: Tipos de faltas assimétricas em sistemas de potência.



A solução de problemas envolvendo faltas assimétricas pode ser obtida pela aplicação das (a) *leis de Kirchhoff* ou (b) *método de componentes simétricas*. O último método é preferido por causa das seguintes razões:





- I. É um método simples e fornece mais generalidade a ser dada aos estudos de desempenho de faltas;
- II. Fornece uma ferramenta útil para os engenheiros de proteção, particularmente em conexão com métodos para a detecção de correntes de falta.

## 6.2 Método das componentes simétricas

O método das componentes simétricas possibilita que sistemas elétricos desequilibrados possam ser analisados como se fossem equilibrados, conforme visto no item 4 deste material.

### 6.2.1 Alguns fatos sobre as correntes de sequência

É interessante compreendermos um pouco mais sobre algumas características das correntes de sequência positiva, negativa e zero:

- I. Um sistema trifásico equilibrado consiste apenas em componentes de sequência positiva; as componentes da sequência negativa e zero são zero;
- II. A presença de correntes de sequência negativa ou zero em um sistema trifásico introduz a assimetria e é indicativa de uma condição anormal do circuito em que esses componentes são encontrados;
- III. A soma vetorial das correntes de sequência positiva e negativa de um sistema trifásico não balanceado é zero. O resultado consiste unicamente em três correntes de sequência zero, isto é, a soma vetorial de todas as correntes de sequência no sistema não balanceado trifásico, ou seja:  
$$= \dot{I}_{A0} + \dot{I}_{B0} + \dot{I}_{C0}$$
- IV. Em um sistema trifásico a 4 fios desequilibrado, a magnitude dos componentes de sequência zero nas fases é igual a 1/3 da corrente no neutro.
- V. Na ausência de caminho para a terra (neutro) de um sistema trifásico, a corrente do neutro é zero e as correntes da linha não contêm componentes de sequência zero. Uma carga conectada ao delta não fornece nenhum caminho para o neutro e as correntes da linha que fluem para a carga conectada ao delta não podem conter componentes de sequência zero.
- VI. Em um sistema trifásico desequilibrado, a magnitude dos componentes da sequência negativa não pode exceder a das componentes da sequência positiva. Se os componentes da sequência negativa fossem maiores, a sequência de fases do sistema resultante seria revertida;
- VII. A corrente de uma carga monofásica extraída de um sistema trifásico compreende componentes iguais de sequência positiva, negativa e zero.



### 6.3 Impedâncias de Sequência

Cada elemento do sistema elétrico oferecerá uma certa impedância para diferentes componentes de sequência da corrente que podem não ser iguais. Por exemplo, a impedância que qualquer equipamento oferece à corrente de sequência positiva não será necessariamente a mesma que oferecida à corrente de sequência negativa ou corrente de sequência zero. Portanto, em cálculos de faltas assimétricas, cada componente do sistema elétrico terá três valores de impedância - um correspondente a cada corrente de sequência, a saber:

- I. Impedância de sequência positiva ( $Z_1$ );
- II. Impedância de sequência negativa ( $Z_2$ );
- III. Impedância de sequência zero ( $Z_0$ ).

A impedância oferecida por um equipamento ou circuito à corrente de sequência positiva é chamada impedância de sequência positiva e é representada por  $Z_1$ . Da mesma forma, as impedâncias oferecidas por qualquer circuito ou equipamento a correntes de sequência negativa e zero são, respectivamente, chamadas impedância de sequência negativa ( $Z_2$ ) e impedância de sequência zero ( $Z_0$ ).

Podem observar-se os seguintes pontos:

- a) Em um sistema equilibrado trifásico, cada componente ou circuito oferece apenas uma impedância - a que oferece resistência à passagem da corrente de sequência positiva. Isso é esperado devido à ausência de correntes de sequência negativa e zero no sistema trifásico equilibrado;
- b) Em um sistema trifásico desequilibrado, componente ou circuito terá três valores de impedância a saber: impedância de sequência positiva, de sequência negativa e de sequência zero;
- c) As impedâncias de sequência positiva e negativa de circuitos lineares, simétricos e estáticos (por exemplo, linhas de transmissão, cabos, transformadores e cargas estáticas) são iguais e são as mesmas usadas na análise de condições equilibradas. Isto é devido ao fato de que a impedância de tais circuitos é independente da ordem de fase, desde que as tensões aplicadas sejam equilibradas. Pode notar-se que as impedâncias de sequência positivas e negativas de máquinas rotativas (por exemplo, motores síncronos e de indução) são normalmente diferentes;
- d) A impedância da sequência zero depende do caminho seguido pela corrente da sequência zero. Como este caminho é geralmente diferente do caminho tomado pelas correntes de sequência positiva e negativa, portanto, a impedância de sequência zero geralmente é diferente da impedância de sequência positiva ou negativa;

#### 6.3.1 Alguns fatos sobre as impedâncias de sequência

A determinação das impedâncias dos vários elementos do sistema de energia (por exemplo, geradores, transformadores, linhas de transmissão, etc.) para correntes de sequência positiva, negativa e zero é de importância considerável na determinação das correntes de falta em um sistema trifásico desequilibrado. Uma breve explicação preliminar pode ser interessante aqui. Serão considerados os seguintes três principais equipamentos:

- I. **Geradores síncronos:** As impedâncias de sequência positiva, negativa e zero das máquinas rotativas são geralmente diferentes. A impedância de sequência positiva de um gerador síncrono é igual à impedância síncrona da máquina. A impedância de sequência negativa é muito menor do que a impedância de sequência positiva. A



impedância de sequência zero é um item variável e, se seu valor não for dado, pode ser assumido como igual à impedância de sequência positiva. Em resumo:

*Impedância de sequência negativa < Impedância de sequência positiva*

*Impedância de sequência zero = item variável: pode ser tomado igual à impedância de sequência (+) se seu valor não for dado*

Pode valer a pena mencionar aqui que qualquer impedância  $Z_f$  conectada entre o centro-estrela da carga e à terra de um sistema conectado em estrela tem o efeito de introduzir uma impedância de  $3 Z_f$  por fase. Isto se deve ao fato de as três correntes de sequência zero serem iguais e estarem em fase entre si, conseqüentemente a soma fasorial de tais correntes será diferente de zero no centro-estrela, logo elas se somarão e fluirão para a terra.

- II. **Transformadores:** Uma vez que os transformadores têm a mesma impedância com a rotação de fase reversa, suas impedâncias de sequência positiva e negativa são iguais; sendo este valor igual à impedância de dispersão do transformador. No entanto, a impedância de sequência zero depende da conexão à terra. Se houver um circuito de passagem da corrente para a terra, a impedância de sequência zero será igual à impedância de sequência positiva, caso contrário será infinito. Em resumo,

*Impedância de sequência positiva = impedância de sequência negativa = Impedância do transformador*

*Impedância de sequência zero = impedância de sequência positiva, se houver um circuito para corrente de terra*

= Infinito, se não houver um circuito de passagem para corrente de terra.

- III. **Linhas de transmissão:** As seqüências positiva e negativa de uma linha são as mesmas, sendo este valor igual à impedância longitudinal (série) da linha. Isso é esperado porque a rotação de fase das correntes não faz diferença nas constantes da linha. No entanto, a impedância da sequência zero geralmente é muito maior do que a impedância de sequência positiva ou negativa. Em resumo:

*Impedância de sequência positiva = impedância de sequência negativa = impedância da linha*

*Impedância de sequência zero = Item variável: pode ser tomado como três vezes a impedância de sequência + se seu valor não for dado*



## 6.4 Análises de Faltas Assimétricas

Na análise de faltas assimétricas, serão feitas as seguintes premissas:

- I. A f.e.m gerada pelo sistema é apenas de sequência positiva;
- II. O sistema está operando em vazio, ou seja, não existe nenhuma corrente elétrica fluindo pelo sistema que não seja apenas a corrente de falta;
- III. A impedância da falta é zero;
- IV. A fase A deve ser tomada como referência.

Em cada caso de falta assimétrica, as f.e.m.s por fase são indicadas por  $E_A$ ,  $E_B$  e  $E_C$  e a tensão terminal por fase por  $V_A$ ,  $V_B$  e  $V_C$ .

### 6.4.1 Falta Fase-Terra

Considere um sistema trifásico com o centro-estrela aterrado. Façamos se estabelecer um curto-circuito fase-terra pela conexão da fase A com a terra, conforme apresentado na Figura 56 abaixo:

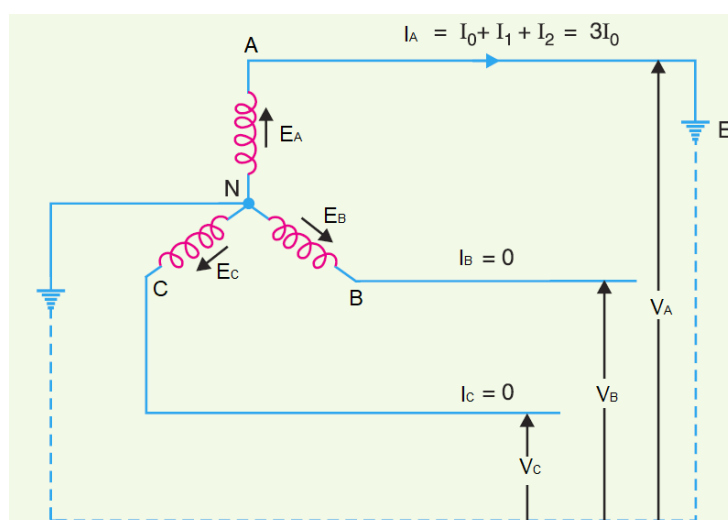
Pela apresentação da figura abaixo, fica claro que:

$$\dot{V}_A = 0 ; \text{ e } \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0 \quad (83)$$

As correntes de sequência na fase A, em termos das correntes de linha, serão:

$$\begin{aligned} \dot{i}_0 &= \frac{1}{3}(\dot{i}_A + \dot{i}_B + \dot{i}_C) = \frac{1}{3}\dot{i}_A \\ \dot{i}_1 &= \frac{1}{3}(\dot{i}_A + \alpha\dot{i}_B + \alpha^2\dot{i}_C) = \frac{1}{3}\dot{i}_A \\ \dot{i}_2 &= \frac{1}{3}(\dot{i}_A + \alpha^2\dot{i}_B + \alpha\dot{i}_C) = \frac{1}{3}\dot{i}_A \\ \dot{i}_0 &= \dot{i}_1 = \dot{i}_2 = \frac{1}{3}\dot{i}_A \end{aligned} \quad (84)$$

Figura 56: Sistema trifásico em condição de curto-circuito monofásico.



### a) Correntes de Falta

Em primeiro lugar, a expressão para a corrente  $i_A$  de falta será derivada. Seja  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_0$  as impedâncias de sequência positiva, negativa e zero do gerador, respectivamente. Considere o caminho **NAEN** na Figura 56 em circuito fechado. À medida que as correntes de sequência produzem quedas de tensão devido apenas às suas respectivas impedâncias de sequência, temos, portanto,

$$E_A = \dot{I}_1 \dot{Z}_1 + \dot{I}_2 \dot{Z}_2 + \dot{I}_0 \dot{Z}_0 + \dot{V}_A \quad (85)$$

Como,

$$\begin{aligned} \dot{V}_A &= 0 \text{ e } \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dot{I}_0 \\ E_A &= \dot{I}_0 (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_0) \end{aligned}$$

Ou,

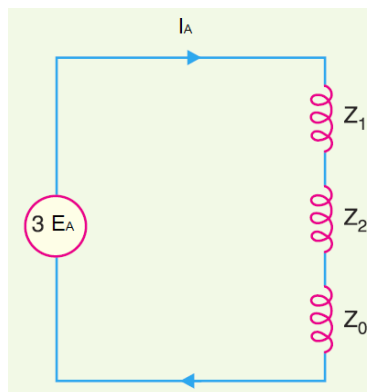
$$\dot{I}_0 = \frac{E_A}{(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_0)} \quad (86)$$

Desse modo, a corrente de falta será:

$$\dot{I}_A = 3\dot{I}_0 = \frac{3E_A}{(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_0)} \quad (87)$$

Observando a Eq. 85 verifica-se que o circuito equivalente a partir do qual a corrente de falta pode ser calculada como indicado na **Erro! Fonte de referência não encontrada.** É claro que a corrente de falta é obtida conectando as impedâncias da sequência em série através de um gerador imaginário de tensão  $3E_A$ .

Figura 57: Rede de sequência equivalente para curto-circuito monofásico.



Esta é uma parte muito interessante do método das componentes simétricas e torna a análise fácil e interessante. De fato, esse método permite tratar qualquer falta assimétrica como um circuito simples com suas impedâncias de sequência interconectadas de forma apropriada de acordo com a falta que esteja sendo analisada.

A consideração feita na determinação da Eq. 85 é que a impedância de falta é zero. No entanto, se a impedância de falta for  $Z_f$ , então a expressão para a corrente de falta torna-se:

$$\dot{I}_A = \frac{3E_A}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_0 + \dot{Z}_f} \quad (88)$$



Pode ser acrescentado aqui que, se o neutro não for aterrado, a impedância de sequência zero será infinita e a corrente de falta é zero. Isso é esperado porque agora não existe nenhum caminho para o fluxo de corrente de falta.

### b) Tensões de fase durante a falta

Agora vamos calcular as tensões da fase em falta (isto é, tensão entre cada fase e o ponto de falta). Sabendo que a f.e.m. gerada no sistema é apenas de sequência positiva, os componentes de sequência de f.e.m na fase A são:

$$\dot{E}_0 = 0 ; \dot{E}_2 = 0 \text{ e } \dot{E}_1 = \dot{E}_A \quad (89)$$

As tensões de sequência para uma falta na fase A serão:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \dot{E}_1 - \dot{I}_1 \dot{Z}_1 \rightarrow \dot{E}_1 - \frac{\dot{Z}_1 \dot{E}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_0} \\ \dot{V}_1 &= \frac{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_0}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_0} \dot{E}_1 \\ \therefore \\ \dot{V}_2 &= 0 - \dot{I}_2 \dot{Z}_2 \rightarrow \frac{-\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_0} \dot{E}_1 \\ \dot{V}_0 &= 0 - \dot{I}_0 \dot{Z}_0 \rightarrow \frac{-\dot{Z}_0}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_0} \dot{E}_1 \end{aligned} \quad (90)$$

Como se trata de um curto-circuito monofásico na fase A, sem impedância de aterramento, podemos diretamente concluir que a tensão na fase A será igual a zero, o que pode ser provado pela expressão  $\dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_0 = 0$ . A tensão em todas as fases do sistema trifásico em falta monofásica pode ser encontrada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_A &= \dot{V}_0 + \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 0 \\ \dot{V}_B &= \dot{V}_0 + \alpha^2 \dot{V}_1 + \alpha \dot{V}_2 = 0 \\ \dot{V}_C &= \dot{V}_0 + \alpha \dot{V}_1 + \alpha^2 \dot{V}_2 = 0 \end{aligned} \quad (91)$$

Resumindo, para um curto-circuito monofásico, temos:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad \dot{I}_A &= \frac{3E_A}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_0 + \dot{Z}_f} ; \dot{I}_B = \dot{I}_C = 0 \\ \dot{V}_A &= \dot{V}_0 + \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 0 \\ \dot{V}_B &= \dot{V}_0 + \alpha^2 \dot{V}_1 + \alpha \dot{V}_2 = 0 \\ \text{II.} \quad \dot{V}_C &= \dot{V}_0 + \alpha \dot{V}_1 + \alpha^2 \dot{V}_2 = 0 \end{aligned}$$



### 6.4.2 Falta Fase-Fase

Considere uma falta entre as fases B e C como apresentado na **Erro! Fonte de referência não encontrada.** As condições criadas por esta falta levam a:

$$\dot{V}_B = \dot{V}_C ; \dot{I}_A = 0 \text{ e } \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0 \quad (92)$$

Ainda considerando a fase A como referência, temos:

$$\dot{I}_0 = \frac{1}{3}(\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) = 0 \quad (93)$$

$$\dot{V}_B = \dot{V}_C$$

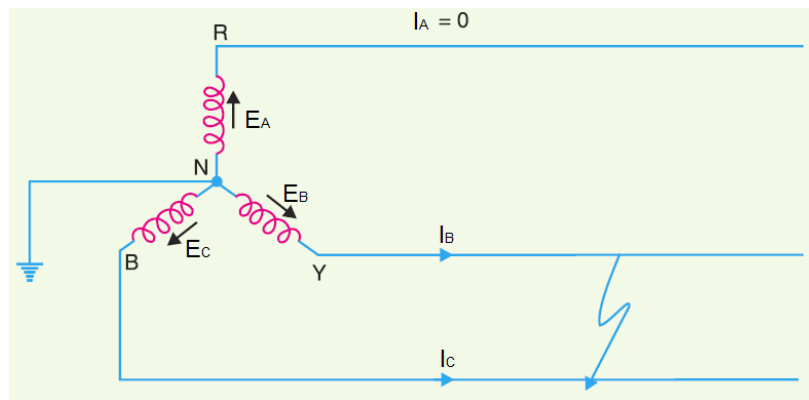
Expressando a equação acima em termos das componentes de sequência, temos:

$$\dot{V}_0 + \alpha^2 \dot{V}_1 + \alpha \dot{V}_2 = \dot{V}_0 + \alpha \dot{V}_1 + \alpha^2 \dot{V}_2$$

$$\dot{V}_1(\alpha^2 - \alpha) = \dot{V}_2(\alpha^2 - \alpha)$$

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 \quad (94)$$

Figura 58: Sistema trifásico em condição de curto-circuito bifásico envolvendo as fases B e C.



Lembrando que:

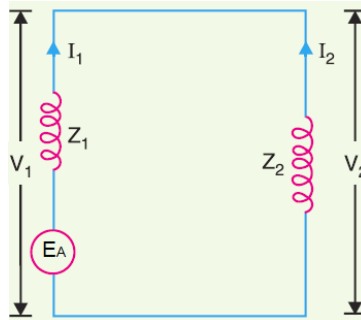
$$\begin{aligned} \dot{I}_B + \dot{I}_C &= 0 \\ (\dot{I}_0 + \alpha^2 \dot{I}_1 + \alpha \dot{I}_2) + (\dot{I}_0 + \alpha \dot{I}_1 + \alpha^2 \dot{I}_2) &= 0 \\ (\alpha^2 + \alpha)(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) &= 0 \end{aligned} \quad (95)$$

#### a) Correntes de Falta

Observando as Eq. 95 e 96, verifica-se que as impedâncias de sequência só podem estar conectadas como mostrado na Figura 59.



Figura 59: Rede de seqüência equivalente para curto-circuito bifásico.



É claro a partir da figura que:

$$\dot{I}_1 = -\dot{I}_2 = \frac{E_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \quad (96)$$

Obtendo-se, assim a corrente de falta pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \dot{I}_B &= \dot{I}_0 + \alpha^2 \dot{I}_1 + \alpha \dot{I}_2 \\ \dot{I}_B &= 0 + \alpha^2 \left( \frac{E_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \right) + \alpha \left( \frac{-E_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \right) \\ \dot{I}_B &= (\alpha^2 - \alpha) \left( \frac{E_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \right) \\ \dot{I}_B &= \frac{-j\sqrt{3}E_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} = -\dot{I}_C \end{aligned} \quad (97)$$

#### b) Tensões de fase durante a falta

Lembrando que a única tensão presente na rede de seqüência equivalente é apenas de seqüência de positiva, os componentes de seqüência da f.e.m. na fase A serão:

$$\dot{E}_0 = 0 ; \dot{E}_2 = 0 \text{ e } \dot{E}_1 = \dot{E}_A \quad (98)$$

As componentes de seqüência da tensão no ponto da falta na fase A serão:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \dot{E}_1 - \dot{I}_1 \dot{Z}_1 = \dot{E}_1 - \left( \frac{\dot{Z}_1 E_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \right) \\ \dot{V}_1 &= \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \dot{E}_1 \\ \dot{V}_2 &= 0 - \dot{I}_2 \dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \dot{E}_1 \\ \dot{V}_0 &= 0 - \dot{I}_0 \dot{Z}_0 = 0 \end{aligned} \quad (99)$$





As tensões de fase durante a falta serão:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_A &= \dot{V}_0 + \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \\
 \dot{V}_A &= 0 + \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \dot{E}_1 + \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \dot{E}_1 \\
 \dot{V}_A &= \frac{2\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \dot{E}_1 \\
 \therefore \\
 \dot{V}_B &= \dot{V}_0 + \alpha^2 \dot{V}_1 + \alpha \dot{V}_2 \\
 \dot{V}_B &= 0 + \alpha^2 \left( \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \dot{E}_1 \right) + \alpha \left( \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \dot{E}_1 \right) \\
 \dot{V}_B &= (\alpha^2 - \alpha) \left( \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \dot{E}_1 \right) \tag{100} \\
 \dot{V}_B &= - \left( \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \dot{E}_1 \right) \\
 \therefore \\
 \dot{V}_C &= \dot{V}_0 + \alpha \dot{V}_1 + \alpha^2 \dot{V}_2 \\
 \dot{V}_C &= 0 + \alpha \left( \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \dot{E}_1 \right) + \alpha^2 \left( \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \dot{E}_1 \right) \\
 \dot{V}_C &= (\alpha^2 - \alpha) \left( \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \dot{E}_1 \right) \\
 \dot{V}_C &= - \left( \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \dot{E}_1 \right)
 \end{aligned}$$

Resumindo, para um curto-circuito monofásico, temos:

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad & i_A = 0 ; i_B = i_C = \frac{-j\sqrt{3}E_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \\
 \text{II.} \quad & \dot{V}_B = \dot{V}_C = - \left( \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \dot{E}_1 \right) \text{ e } \dot{V}_A = \frac{2\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \dot{E}_1
 \end{aligned}$$



### 6.4.3 Falta Fase-Fase-Terra

Considere uma falta bifásica envolvendo as fases B e C e a terra como apresentado na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**. As condições criadas por esta falha levam a:

$$\dot{V}_B = \dot{V}_C = 0 ; \dot{I}_A = 0 \quad (101)$$

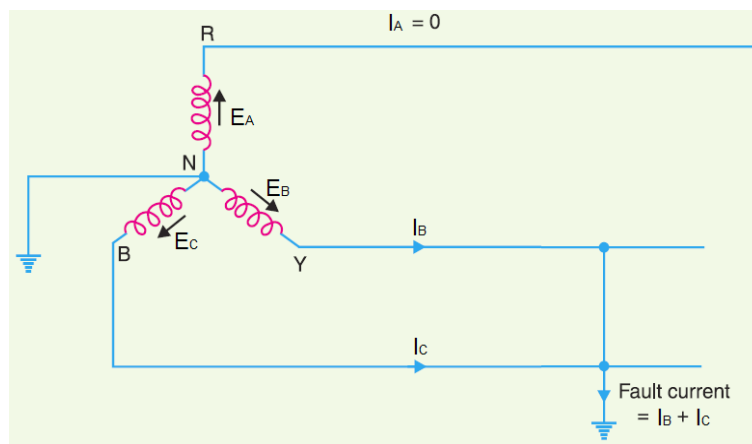
Sabendo que:

$$\begin{aligned} \dot{V}_B = \dot{V}_C = 0 \\ \dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V}_0 = \frac{1}{3} \dot{V}_A \end{aligned} \quad (102)$$

O que implica em:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_0 + \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0 \quad (103)$$

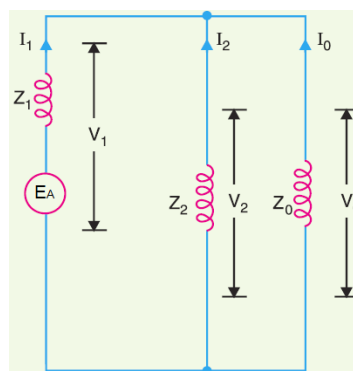
Figura 60: Sistema trifásico em condição de curto-circuito bifásico envolvendo as fases B e C e a Terra.



#### a) Correntes de Falta

As equações Eq. 102 e 103 acima revelam que as impedâncias de sequência devem ser conectadas como mostrado na Figura 61.

Figura 61: Rede de sequência equivalente para curto-circuito bifásico envolvendo as fases B e C e a Terra.



É claro que:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{E_1}{\dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_2 \times \dot{Z}_0}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_0}} \\ i_2 &= -i_1 \frac{\dot{Z}_0}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_0} \\ i_0 &= -i_1 \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_0} \end{aligned} \quad (104)$$

A corrente de falta será,  $i_F = i_B + i_C = 3i_0$ , logo, temos que:

$$\begin{aligned} i_F &= 3 \left( -i_1 \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_0} \right) \\ i_F &= -\frac{3\dot{Z}_2}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_0} \times \frac{E_1}{\dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_2 \times \dot{Z}_0}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_0}} \\ i_F &= -\frac{3\dot{Z}_2 \times E_1}{\dot{Z}_0 \dot{Z}_1 + \dot{Z}_0 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_2} \end{aligned} \quad (105)$$

#### b) Tensões de fase durante a falta

As componentes de sequência das tensões na fase A serão:

$$\dot{V}_1 = \dot{E}_1 - i_1 \dot{Z}_1 \quad ; \quad \dot{V}_2 = 0 - i_2 \dot{Z}_2 \quad ; \quad \dot{V}_0 = 0 - i_0 \dot{Z}_0 \quad (106)$$

Agora, tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \dot{V}_2 = \dot{V}_0 = \frac{1}{3} \dot{V}_A \\ \dot{V}_A &= \dot{V}_0 + \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 3\dot{V}_2 \\ \dot{V}_B &= \dot{V}_0 + \alpha^2 \dot{V}_1 + \alpha \dot{V}_2 = (\alpha^2 + \alpha + 1) \dot{V}_2 \\ \dot{V}_B &= 0 \times \dot{V}_2 = 0 \\ \dot{V}_C &= \dot{V}_0 + \alpha \dot{V}_1 + \alpha^2 \dot{V}_2 = (\alpha + \alpha^2 + 1) \dot{V}_2 \\ \dot{V}_C &= 0 \times \dot{V}_2 = 0 \end{aligned} \quad (107)$$



## REFERÊNCIAS

- J. Grainger and W. Stevenson, "Power System Analysis," McGraw-Hill, New York, 1994.
- H. Saadat, "Power System Analysis," McGraw-Hill, New York, 1999.
- O. Elgerd, "Introdução à Teoria de Sistemas de Energia Elétrica," McGraw-Hill, New York, 1982.
- Caselato, Djalma, "Exercícios Introdutórios a Sistemas Elétricos de Potência"
- Notas de aula do professor Sérgio Haffner, "Modelagem e Análise de Sistemas Elétricos em Regime Permanente" disponível em <http://slhaffner.phpnet.us/>
- Alcir J. Monticelli (1983). Fluxo de carga em redes de energia elétrica. Edgar Blücher.
- J. Arrillaga, N. R. Watson (2001) Computer modelling of electrical power systems. John Wiley & Sons Ltd.
- W.D. Stevenson Jr., Elements of Power System Analysis, 4th Edition, McGraw-Hill, 1982.
- Notas de aula do prof. Dr. Jim McCalley, da Universidade Estadual de IOWA, disponível em <http://home.eng.iastate.edu/~jdm/ee553/index.htm>.
- Notas de aula do professor Ralph Fehr, "Short Circuit Current Calculations Using Symmetrical Components" disponível em <http://www.pdhonline.com/courses/e251/e251content.pdf>



## LISTA DE FIGURAS E TABELAS

Figura 1: Cálculo básico para determinar a potência média em um circuito monofásico.	5
Figura 2: Conjunto O triângulo de potências.	7
Figura 3: Circuito genérico substituído por uma impedância equivalente.	8
Figura 4: Sistema para o exemplo 1.1.	9
Figura 5: Circuito trifásico equilibrado.	10
Figura 6: Circuito trifásico conectado em delta.	11
Figura 7: Circuito trifásico conectado em estrela.	12
Figura 8: Circuito do exemplo 3.1.	15
Figura 9: Circuito do exemplo 3.1.	17
Figura 10: Circuito do problema 5.	20
Figura 11: Solução item a) do problema 9.	23
Figura 12: Solução item b) do problema 9.	23
Figura 13: Circuito equivalente do problema 11.	25
Figura 14: Página inicial do paper Method of Symmetrical Co-ordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks.	29
Figura 15: Conjunto de fasores de correntes de um sistema trifásico desequilibrado.	30
Figura 16: Caracterização da sequência de fase direta, ou sequência positiva.	31
Figura 17: Caracterização da sequência de fase inversa, ou sequência negativa.	31
Figura 18: Caracterização da sequência de fase direta, ou sequência positiva.	31
Figura 19: Caracterização da sequência de fase inversa, ou sequência negativa.	32
Figura 20: Caracterização da sequência zero.	32
Figura 21: Representação das componentes de sequência positiva expresso em termos da fase A.	33
Figura 22: Representação das componentes de sequência negativa expresso em termos da fase A.	33
Figura 23: Representação das componentes de sequência zero expresso em termos da fase A.	33
Figura 24: Representação das componentes de sequência zero em expresso em termos da fase A.	34
Figura 25: Fonte conectada em Y alimentando uma carga qualquer.	36
Figura 26: Correntes de linha no tempo.	36
Figura 27: Correntes de sequência zero.	37
Figura 28: Caminho de retorno para correntes de sequência zero.	37
Figura 29: Circuito monofásico equivalente para correntes de sequência zero.	38
Figura 30: Diagrama unifilar.	39
Figura 31: Primeiro estágio da determinação da rede de sequência positiva.	40
Figura 32: Próxima Etapa do Desenvolvimento da Rede de Seqüência Positiva.	40
Figura 33: Rede de sequência positiva.	40
Figura 34: Rede de sequência negativa.	41
Figura 35: Comportamento de um transformador delta-estrela para correntes de sequência zero.	42
Figura 36: Modelo de um transformador delta-estrela para sequência zero.	43
Figura 37: Primeiro passo do desenvolvimento da rede de reatância de sequência zero.	44
Figura 38: Primeiro passo do desenvolvimento da rede de reatância de sequência zero.	44
Figura 39: Diagrama dos fasores do exemplo 1.	46
Figura 40: Diagrama fasorial das componentes de sequência calculadas para o exemplo 1.	47
Figura 41: Diagrama fasorial das componentes de fase calculadas para o exemplo 2.	48
Figura 42: Fasores originais desequilibrados e suas componentes de sequência, positiva, negativa e zero, respectivamente.	48
Figura 43: Fasores originais e suas componentes de sequência.	49
Figura 44: Ilustração de um curto-circuito em uma rede unifilar.	50
Figura 45: Ilustração de um curto-circuito trifásico.	53
Figura 46: Ilustração de um curto-circuito em uma rede unifilar, no ponto F.	53
Figura 47: Diagrama unifilar para o exemplo 1.	55



Figura 48: Instalação de reatores limitadores em geradores.	57
Figura 49: Instalação de reatores limitadores em alimentadores.	58
Figura 50: Instalação de reatores limitadores em barramentos.	59
Figura 51: Instalação de reatores limitadores interligando barras.	60
Figura 52: Sistema elétrico para o exemplo 3.	61
Figura 53: Sistema elétrico para o exemplo 4.	62
Figura 54: Diagrama de impedâncias para o exemplo 4: a) Curto-circuito na barra; b) Curto-circuito no lado de alta tensão do transformador.	63
Figura 55: Tipos de faltas assimétricas em sistemas de potência.	64
Figura 56: Sistema trifásico em condição de curto-circuito monofásico.	68
Figura 57: Rede de sequência equivalente para curto-circuito monofásico.	69
Figura 58: Sistema trifásico em condição de curto-circuito bifásico envolvendo as fases B e C.	71
Figura 59: Rede de sequência equivalente para curto-circuito bifásico.	72
Figura 60: Sistema trifásico em condição de curto-circuito bifásico envolvendo as fases B e C e a Terra.	74
Figura 61: Rede de sequência equivalente para curto-circuito bifásico envolvendo as fases B e C e a Terra.	74

